FRACTALES AUTOSEMEJANTES CON CABRI

Publio Suárez Sotomonte

AUTOSIMILAR FRACTALS WITH CABRI.

"Si los profesores y maestros vivieran y enseñaran las matemáticas como arte, todos podríamos vivir esa experiencia creativa, y tal vez muchos de los artistas serían también matemáticos, muchos de los matemáticos artistas, y todos podríamos ser al menos buenos aficionados a ambas cosas".

Carlos E. Vasco U.

1. Resumen

En este artículo se describe una propuesta didáctica para modelar y representar, de manera aproximada, fractales y familias de fractales autosemejantes en el plano, usando el ambiente de geometría dinámica proporcionado por el Cabri Geometry II. En el contexto del enfoque epistémico representacionalista de la matemática; especialmente enmarcado en las nociones de representaciones semióticas, su relación con las representaciones mentales y su papel en la estructuración de conceptos geométricos se trabajan, a partir de las nociones elementales de geometría euclidiana, geometría cartesiana, geometría vectorial y de la geometría de las transformaciones, de manera particular de la noción de afinidades regulares contractivas, los llamados sistemas iterados de funciones (IFS's), que cimientan las estructuras fractales. En el ambiente dinámico de Cabri se construyen los fractales de Pitágoras, curvas fractales, estrellas fractales y ejemplos de superfractales, entre otros, para evidenciar algunos aspectos de la relación entre arte y geometría. A la luz del enfoque de resolución de problemas, adoptando la heurística de pensar matemáticamente propuesta por John Mason, se describen breves elementos teóricos de la didáctica de la geometría, que soportan las actividades para descubrir las propiedades fundamentales de los fractales, sustento para su construcción y modelación en computador.

Palabras clave:

Geometría fractal, sistema iterado de funciones, dibujos-dinámicos, estrategia didáctica, aprendizaje.

Abstract:

In this article it is described a didactical proposal to model and to draw fractals and families of autosimilar fractals in the plane, using the environment of dynamic geometry provided by the Cabri Geometry II. Based in the notions of semiotic representations and its relation with the mental representations and its role in the construction of geometrical concepts, are worked, since the notions of Euclidian Geometry, and of the transformations geometry, specially the notion of contractive regular analogies, the called iterated systems of functions (IFS), that found the fractal structures. Are constructed in the CABRI environment, the fractals of Pitágoras, fractal curves, fractal stars, superfractals, among another one's, to evidence some aspects of the relation between art and geometry. Watching the problems resolution focus, adopting the heuristics for to think mathematically proposed by John Mason, are described brief theorical elements of the didactics of geometry, that support the activities to discover the principal properties of the fractals, support to its construction and modelation in the computer.

Key words:

Didactics, mathematics education, iterated functions systems (IFS's), the fractal geometry of nature, learning, macro-constructions, dinamic geometry, Cabri Geometry II.

2. Introducción

Actualmente la geometría fractal de la naturaleza está ampliamente difundida en el ámbito de las aplicaciones matemáticas; su desarrollo en estructuras formales constituye una de las áreas de mayor auge en el siglo XXI. Existen diversas opciones para introducir de manera formal los fractales en la formación geométrica universitaria, algunas de ellas son, desde los fractales autosemejantes como sistemas iterados de funciones (IFS's), a partir de la geometría de las transformaciones, mediante el estudio de los fractales tipo Mandelbrot y Julia al profundizar tópicos relativos a las orbitas de sistemas dinámicos de variable compleja; desde los fractales de bifurcación como atractores de sistemas dinámicos simples caóticos, a partir de los atractores extraños generados por las soluciones aproximadas de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias y abordando el estudio de la noción de dimensión fractal en teoría de la medida. Estos conforman la variedad de caminos para llegar a este fascinante campo de las matemáticas.

Los docentes de geometría, previo el análisis de la formación que han recibido los estudiantes en el área, se deben preguntar si el camino más apropiado para abordar el estudio de los fractales lo constituyen las estructuras matemáticas, especialmente las algebraicas y geométricas, o existen opciones de tipo intuitivo para iniciar esta tarea, en donde los estudiantes se apropien de las nociones básicas de fractales, de manara más espontánea. Esta última alternativa está al alcance de los estudiantes de primeros semestres universitarios, que deseen aprender las nociones de geometría fractal, sustentadas en la observación sistemática del ambiente circundante, que es considerado el laboratorio natural por excelencia. En él es posible estudiar y analizar los objetos naturales, como la forma de las nubes, el contorno de las montanas, las propiedades de ramificación de las plantas, las propiedades de las hojas, los helechos y las flores, las bellas espirales de conchas y caracoles. Esto permite construir las nociones básicas importantes de geometría fractal como: autosemejanza, irregularidad, iteración y dimensión, que junto con otras nociones geométricas pueden ser formalizadas posteriormente, en el contexto de las estructuras matemáticas.

El enfoque intuitivo para emprender el estudio de la teoría de fractales, consiste en el análisis detallado y gradual de los modelos de fractales más conocidos en la recta, el plano y el espacio tridimensional. Es importante reconocer que, desde este punto de vista, el conocimiento sobre algunas nociones geométricas básicas, facilita la modelación de los fractales; entre las más importantes, están las nociones de transformaciones como: traslaciones, rotaciones, reflexiones, homotecias y composiciones de ellas; de manera especial, el concepto de transformación afín contractiva. Los fractales más conocidos son la curva de Koch, la curva de Hilbert, el triángulo, la carpeta y tetraedro de Sierpinski, el copo de nieve e islas fractales, el fractal del triángulo de Pitágoras, fractales tipo ramificación, binario y ternario, estrellas fractales, H-fractal, entre muchos otros.

Una actividad que refuerza este enfoque es la exploración de las formas generadas a partir del diseño gráfico y las expresiones artísticas de artesanos, pintores y escultores, específicamente la rica obra de Mauritz Escher, en donde subyace una variada gama de conceptos geométricos correspondientes a varios tipos de geometría.

Las experiencias realizadas con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), con sede en Tunja, han demostrado que al momento de modelar fractales autosemejantes, se deben enfatizar previamente las construcciones geométricas con regla y compás, en lápiz y papel (sistemas estáticos). El rescate de este tipo de actividades permite a los estudiantes, interactuar con sus dibujos, conocer las relaciones entre los distintos objetos, operaciones y relaciones que conforman un IFS. Por ejemplo, al construir el modelo del triángulo de Sierpinski, a partir de un triángulo, un cuadrado, o en general cualquier figura compacta (cerrada y acotada en ▯"), el estudiante descubre que se obtiene el mismo atractor; además, con la solución de problemas debidos a la métrica y al cálculo de la dimensión de homotecia, se trabajan algunas sucesiones y series convergentes ó divergentes; al estudiar el problema del longitud, superficie lateral y volumen, descubre en el proceso propiedades comunes a los diversos polígonos usados, o propiedades sofisticadas como la relación entre los números impares del triángulo de Pascal y la representación por píxeles del triangulo de Sierpinski, como ejemplo de los autómatas celulares. En el caso del fractal de Pitágoras, además del famoso teorema, se trabajan el teorema de Tales, respecto a los ángulos inscritos en un semicírculo y principalmente las propiedades respecto a la composición de transformaciones afines contractivas.

El papel jugado por los sistemas de representación semiótica en la construcción de conceptos geométricos es cada vez más reconocido por los matemáticos, pues las experiencias relativas a la floreciente geometría dinámica, ha permitido potenciar la riqueza que conlleva el uso de nuevas tecnologías en el aprendizaje de las matemáticas, de manera especial de la geometría. En lo relativo a la modelación de fractales en computador, se puede afirmar que los ambientes creados para dicho propósito, no solo constituyen un soporte para plasmar ideas y figuras imaginadas en nuestra mente, sino que son la herramienta ideal para desarrollar la creatividad y la imaginación de los estudiantes.

Actualmente existe una diversidad de programas para dibujar fractales, algunos de ellos muy conocidos, como Fractint, Winfrac, FractalVision, Brazil, Fractal Designer, Ultrafractal y Fractal Fantastic, Lsystem, y variadas aplicaciones para dibujar fractales en tiempo de escape. Casi todos ellos, dibujan fractales estáticos, y muy pocos incluyen herramientas para incorporarle dinámica a las creaciones fractales. La gran mayoría utilizan los trucos en la conocida técnica de la animación por rotación de colores, para imprimirle una falsa dinámica a dichos modelos.

Con el auge del ambiente dinámico proporcionado por la aplicación Cabri Geometre II, surge la idea de dibujar representaciones aproximadas de atractores, que se denominarán fractales dinámicos, en donde a partir de el modelo de un fractal conocido o ideado por el estudiante, y con pequeñas variaciones a los parámetros de su construcción, se obtienen familias de fractales, es decir, fractales en donde subyace la misma estructura. Las ilimitadas posibilidades que nos ofrece el ambiente gráfico del Cabri, constituye el puente ideal entre los objetos fractales, los sistemas y las llamadas estructuras fractales. La relación sistema-estructura, bellamente plasmada en los fractales construidos en ambientes de geometría dinámica, constituye el primer paso para la formalización de la teoría fractal, con base en las estructuras algebraicas.

El propósito central de este artículo, es presentar una sucinta descripción de las construcciones de Cabri para algunos fractales conocidos, incorporando la dinámica que caracteriza la aplicación, como soporte para mostrar la diferencia entre los sistemas iterados de funciones y el concepto de estructura fractal. Los conceptos previos necesarios para dichas construcciones, no van más allá de los conceptos básicos de geometría euclidiana y de la geometría de transformaciones, incorporadas en la mayoría de los currículos para distintos niveles de formación.

Antes de iniciar el estudio de las construcciones en Cabri, se plantean algunos referentes didácticos para el aprendizaje de la geometría fractal de la naturaleza, producto de las investigaciones realizadas en la UPTC con estudiantes universitarios, y las actividades relevantes recopiladas de la bibliografía relativas a experiencias didácticas en este campo de la educación matemática,

3. Una propuesta didáctica para aprender fractales

Desde una tendencia cognitivista para el aprendizaje y los enfoques epistemológicos constructivista y representacionalista para la creación en matemáticas, se propone una estrategia didáctica basada en cuatro etapas desarrolladas de manera sistemática y gradual. Ellas son: exploración, representación – modelación, construcción formal e implementación de aplicaciones. Las actividades aquí descritas corresponden a la segunda etapa de representación–modelación.

La estrategia didáctica implica la adopción de enfoques de resolución de problemas. Una de las alternativas viables, para desarrollar como heurística efectiva en el aprendizaje de las matemáticas, es la de ejercitar un verdadero pensamiento matemático. Tradicionalmente el aprendizaje en el área se ha fundamentado en la memoria y los reflejos intelectuales. El carácter mecánico y repetitivo es un factor primordial en este enfoque e imposibilita explotar la riqueza conceptual subyacente en las fórmulas matemáticas que se memorizan y se aplican muchas veces mecánicamente. Si en realidad se quieren propiciar ambientes que favorezcan el aprendizaje significativo de la matemática, se deben cultivar la visualización, la intuición, la imaginación, el análisis, la creatividad y el ingenio, propios de un entorno apropiado para la creación en matemáticas.

La experiencia ha enseñado que se mejora el razonamiento matemático, atacando los problemas concienzudamente, reflexionando sobre la experiencia acumulada, conectando las impresiones recibidas con la acción y estudiando cuidadosamente el proceso de resolución de problemas. La secuencia en este proceso adopta un enfoque metodológico basado principalmente en la inducción y concibe la matemática, desde el punto de vista constructivo, como ente inacabado, que hay que ayudar a complementar y elaborar. Un buen ambiente en el salón de clase proporciona múltiples formas de involucrar estos procesos[1].

Cuando los estudiantes (o profesor) se plantean un problema o situación que ini-

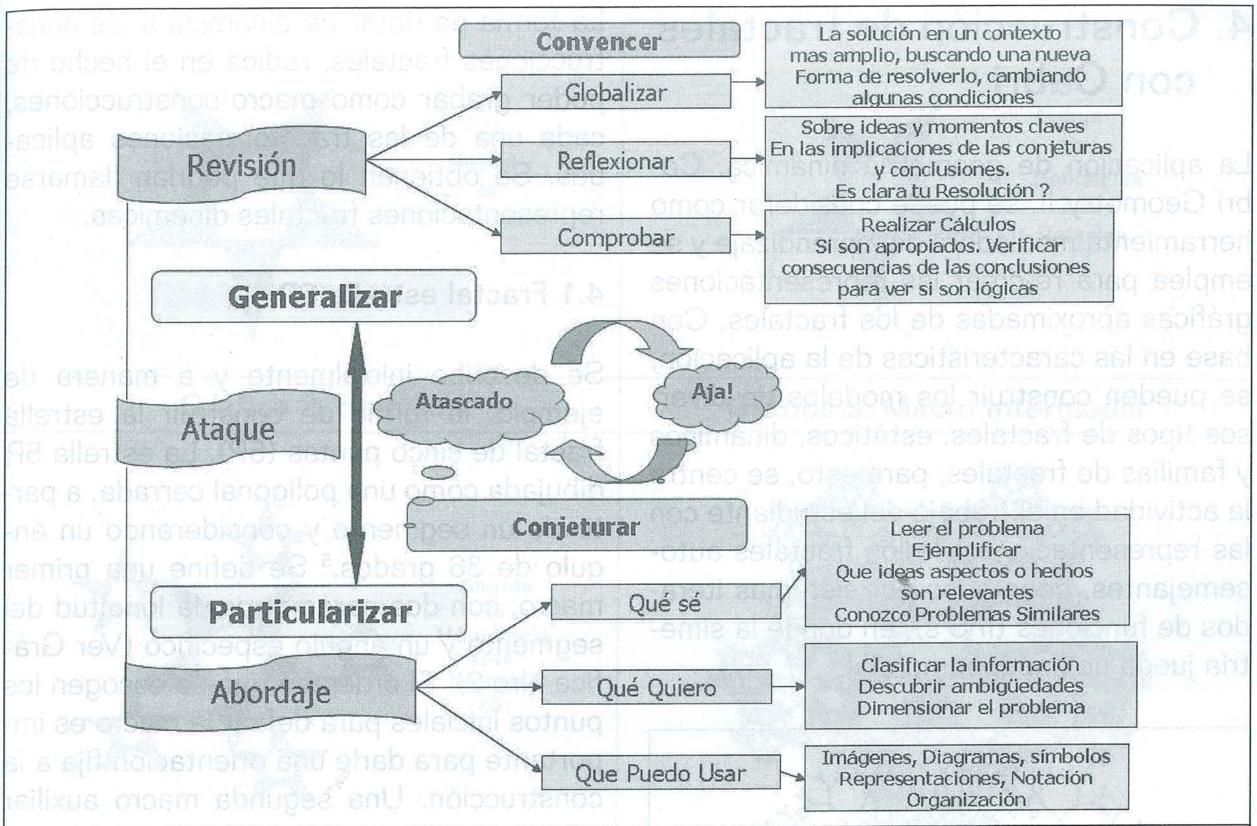
1 MASON, John. Pensar matemáticamente. Madrid: Editorial Labor, 1989.

cialmente resulta complejo para ellos (pero que está a su alcance), la **particularización** les permite vislumbrar caminos de solución, considerando problemas de menor dificultad (dimensionándolos), que luego se constituyen en pasos intermedios para resolver el problema original. La manipulación de modelos visuales proporciona oportunidades de contrastar y observar de manera más significativa las regularidades en las operaciones y algoritmos. La riqueza de la particularización no está en la exploración seriada que se hace de numerosos ejemplos; más bien, radica en que de ellos se desprenden los **planteamientos de conjeturas o hipótesis** acerca de las relaciones o vínculos observados y detectados. Aquí es importante tener en cuenta las preguntas que se hace el estudiante, pues generalmente el profesor las considera intrascendentes, se limita a encontrar la respuesta esperada para dar su propia conclusión. No se puede pasar por alto este momento para confrontar las opiniones de las razones por las cuales formularon determinadas conjeturas. Una vez detectadas las regularidades en la exploración de los ejemplos (casos particulares) se construye un lenguaje simbólico que permita precisar dichas similitudes; por medio de los procesos de abstracción empírica y reflexionante se pueden **generalizar** esas hipótesis.[2] En esta fase, se formulan las proposiciones y los esquemas de demostración que permitan determinar la validez y coherencia de dichas afirmaciones dentro de un conjunto de enunciados que se van deduciendo, a partir de los supuestos inicialmente dados y los axiomas o postulados planteados.

Por supuesto, en el proceso descrito también está inmerso el último paso de los mencionados como propio del pensamiento matemático, **el convencer**; los argumentos que el estudiante pueda emplear para defender sus afirmaciones son de vital importancia. A través de ellos, luego de los procesos argumentativos de confrontación y contrastación, puede encontrar contraejemplos que le obliguen a dudar y hasta a derrumbar los cimientos del sistema formal que ha construido y le permitan volver a otra etapa del pensamiento, observando como encaja lo aprendido con la propia experiencia, (MASON J. et alter, 1989). Esto lo podemos lograr con un ambiente apropiado, para que el estudiante desarrolle los procesos que le permitan pensar en soluciones ingeniosas de problemas de la vida cotidiana o problemas curiosos, formulados por las personas que buscan recrearse con la matemática. Cantor decía: "la esencia de las matemáticas es la libertad; libertad para formularse sus propios problemas, para plantear sus preguntas, formular hipótesis, crear sus sistemas simbólicos, divulgar sus resultados y confrontarlos con otros", (Mason J. et alter, 1989). Fue así como muchos grandes matemáticos construyeron los cimientos teóricos de esta ciencia, que por el carácter formal y abstracto que muchos le imprimen, la hacen ver en ocasiones, tan alejada de la realidad y de nuestras posibilidades.

Los procesos que intervienen en el pensamiento matemático son en resumen: especificar o particularizar, conjeturar, generalizar y convencer. La dinámica de este proceso es permanente, no necesariamente se desarrolla tan linealmente como se describe; ellos se relacionan, se enriquecen y se pueden trabajar en distintos niveles de abstracción.

2 **Ibídem.**



Esquema. Nro. 1 Heurística "Pensar Matemáticamente" de John Mason[3]

Una metodología fundamentada en el desarrollo del pensamiento matemático brinda la oportunidad al estudiante de construir matemática; aunque no sea de alto nivel científico, permite contribuir al verdadero aprendizaje significativo y propende por una formación integral.

La propuesta intenta centrar la actividad en la creación de ambientes apropiados para desarrollar el pensamiento espacial, buscando cimentar las bases sólidas para abordar problemas cada vez más exigentes, muchos de los cuales se enmarcan dentro del un ámbito matemático formal, explotando las representaciones semióticas proporcionadas por la pizarra electrónica. Al vivenciar las actividades diseñadas, se potencian paralelamente los diversos tipos de pensamiento matemático (espacial, métrico, numérico, aleatorio y variacional) y se propicia que los estudiantes sean competetentes en matemáticas[4]; es verdaderamente difícil trabajar una actividad que obedezca solamente a un tipo de pensamiento. Esta función integradora será fundamental para formar estudiantes con mentalidad abierta y flexible, en donde la trasversalidad, inter y transdisciplinariedad del conocimiento, sean las características principales de la solución de problemas.

3 MASON, John. Pensar matemáticamente. Madrid: Editorial Labor, 1989.

4 GARCÍA, Gloria y otros. Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá: Revolución Educativa, Colombia Aprende, Ministerio de Educación Nacional, 2006.

4. Construcción de fractales con Cabri

La aplicación de geometría dinámica, Cabri Geometry II, se puede considerar como herramienta mediadora del aprendizaje y se emplea para re-crear las representaciones gráficas aproximadas de los fractales. Con base en las características de la aplicación, se pueden construir los modelos de diversos tipos de fractales, estáticos, dinámicos y familias de fractales; para esto, se centra la actividad en el trabajo del estudiante con las representaciones de los fractales autosemejantes, generados por sistemas iterados de funciones (IFS's), en donde la simetría juega un papel primordial.

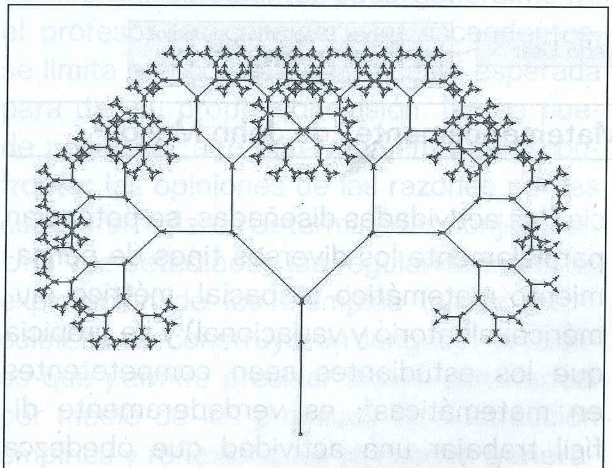


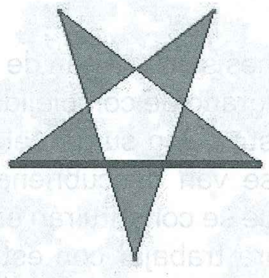
Figura No. 1 Árbol binario, fractal estático

La forma de dotar de dinámica a las construcciones fractales, radica en el hecho de poder grabar como macro-construcciones, cada una de las transformaciones aplicadas. Se obtienen lo que podrían llamarse representaciones fractales dinámicas.

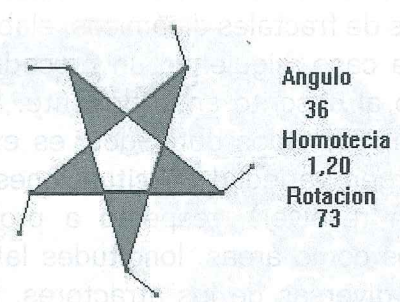
4.1 Fractal estrella 5P

Se describe inicialmente y a manera de ejemplo, la forma de construir la estrella fractal de cinco puntas (5P). La estrella 5P, dibujada como una poligonal cerrada, a partir de un segmento y considerando un ángulo de 36 grados.[5] Se define una primer macro, con dos parámetros, la longitud del segmento y un ángulo específico (Ver Gráfica Nro 2). El orden en que se escogen los puntos iniciales para definir la macro es importante para darle una orientación fija a la construcción. Una segunda macro auxiliar con dos parámetros, permite determinar un segmento trasladado a partir del original, en cada punta de la estrella: el primer parámetro es un factor de homotecia, respecto al segmento semilla y el segundo parámetro es el ángulo de rotación (Ver gráfica 3). Una tercera macro que se construye, graba el mecanismo de reproducción del fractal estrella de cinco puntas, con la cual se puede dibujar la aproximación del fractal, en el nivel. Se pueden grabar macros intermedias de niveles más altos, por ejemplo, nivel tres o cuatro, para agilizar el proceso de representación aproximada del atractor.

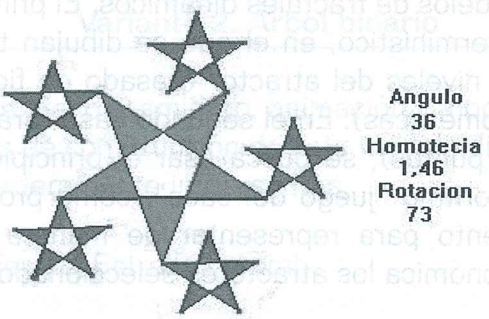
5 LAUWERIER, Hans. Fractals. New Jersey: Princeton University Press, 1987.



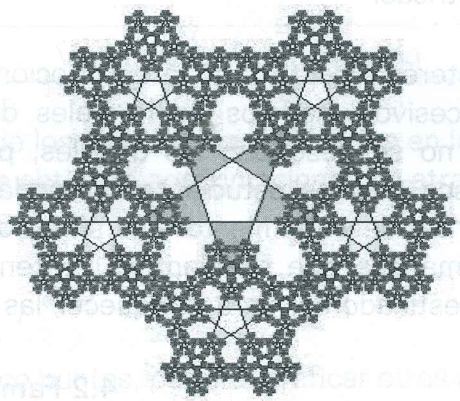
Gráfica 2. Semilla



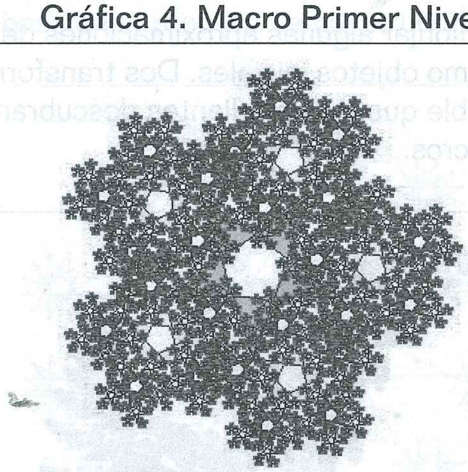
Gráfica 3. Macro Intermedia



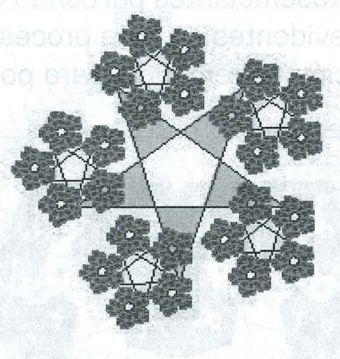
Gráfica 4. Macro Primer Nivel



Gráfica 5. Fractal estrella 5P



Gráfica 6. Modificando parámetros



Gráfica 7. Modificando parámetros

La clave para construir modelos de fractales dinámicos en el ambiente gráfico del Cabri, es poder definir macros con parámetros en su construcción, que posteriormente se pueden tomar como variables para realizar las animaciones que permiten obtener la familia de fractales con la misma estructura. En la medida que aumente el número de variables, es obvio que se amplía la gamma de representaciones aproximadas de atractores obtenidos.

Se presenta a continuación una colección de modelos de fractales dinámicos, elaborados en cada caso, siguiendo un procedimiento análogo al descrito anteriormente. Al analizar los resultados obtenidos, es evidente que surgen variedad de situaciones abiertas (sin resolver), respecto a problemas métricos como áreas, longitudes laterales, formas diversas de los atractores, lugares geométricos, que son una excelente oportunidad para descubrir muchas propiedades geométricas.

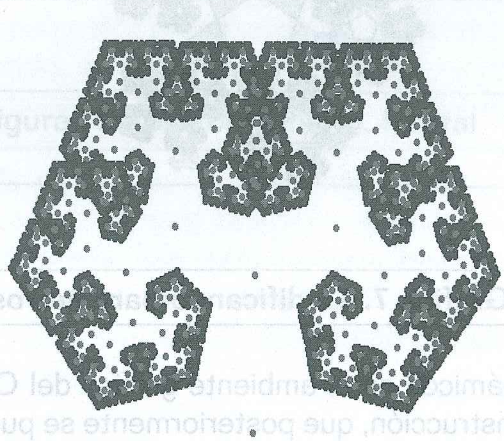
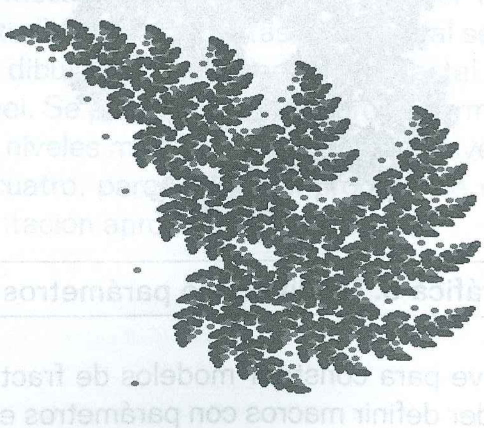
Con interés didáctico, en la descripción de los sucesivos modelos de fractales dinámicos no se describen los detalles, pues se busca que los estudiantes aprendan a través del descubrimiento. Las situaciones problemáticas que se plantean pretenden ser cuestinadoras, para enriquecer las experiencias de los estudiantes en el campo de las representaciones gráficas.

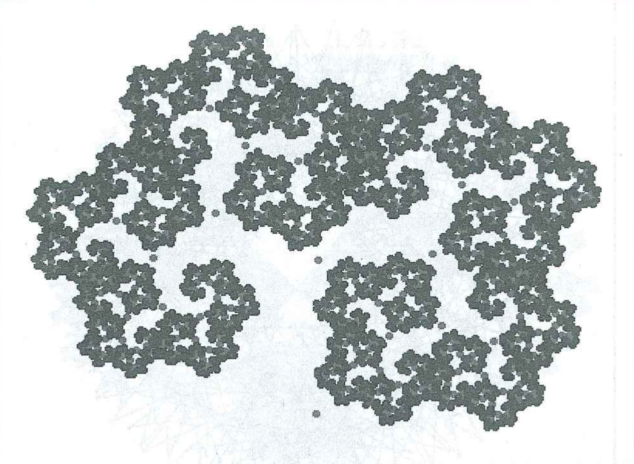
Las construcciones se clasifican de acuerdo con el creciente grado de complejidad; en el proceso de construcción surgen elementos comunes, que se van descubriendo como regularidades que se constituirán en los primeros pasos para trabajar con estructuras fractales.

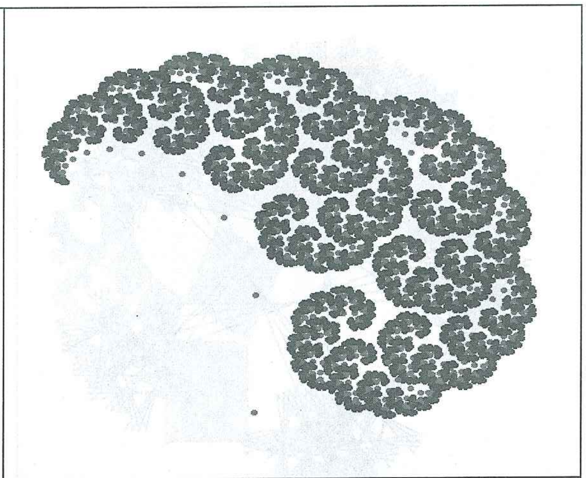
Se distinguen dos maneras de dibujar los modelos de fractales dinámicos. El primero, determinístico, en el que se dibujan todos los niveles del atractor (basado en figuras geométricas). En el segundo caso (gráficas de puntos), se busca usar el principio del algoritmo "juego del caos", como procedimiento para representar de manera más económica los atractores seleccionados.

4.2 Familia Fractal Binario

Adaptando el algoritmo "juego del caos", se pueden dibujar algunas aproximaciones de los fractales autosemejantes partiendo de dos puntos como objetos iniciales. Dos transformaciones son evidentes en este proceso; es recomendable que los estudiantes descubran su caracterización matemática, para poder hacer las macros.

	
Fractal árbol binario	**Variante 1. Árbol binario**



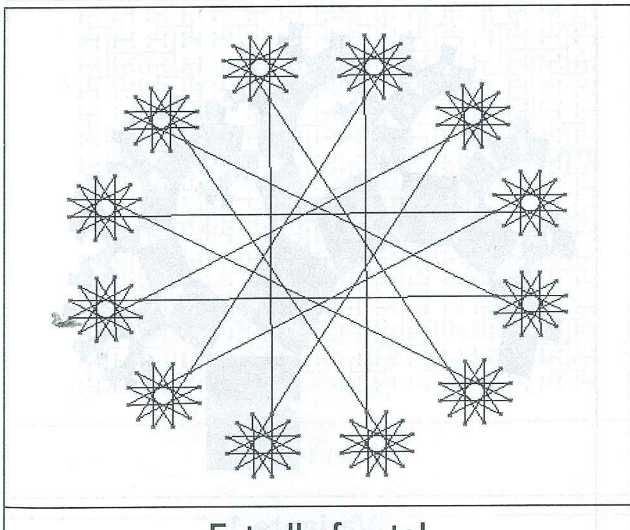


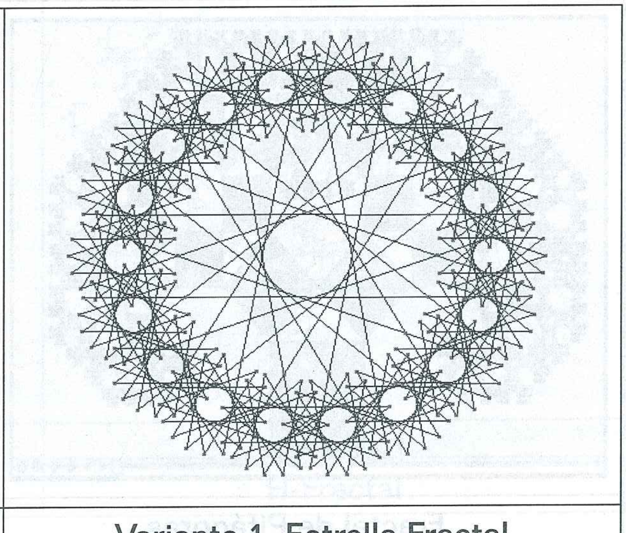
Variante 2. Árbol binario	Variante 3. Árbol Binario

Con el desplazamiento, animación y modificación de los parámetros empleados en los procesos de construcción de este modelo dinámico, se obtienen aproximaciones de atractores verdaderamente interesantes.

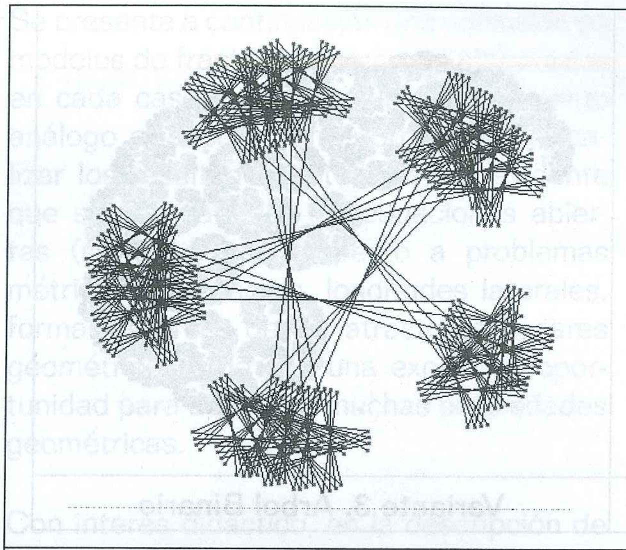
4.3 Familia Estrella Fractal

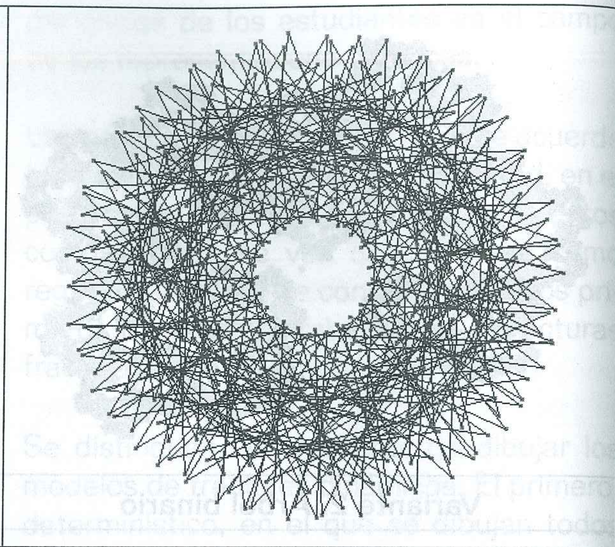
Una sencilla modificación del fractal estrella de cinco puntas, permite graficar otras aproximaciones de atractores, con la simple variación del ángulo de la figura poligonal, que sirvió de base en el proceso de construcción.





Estrella fractal	Variante 1. Estrella Fractal



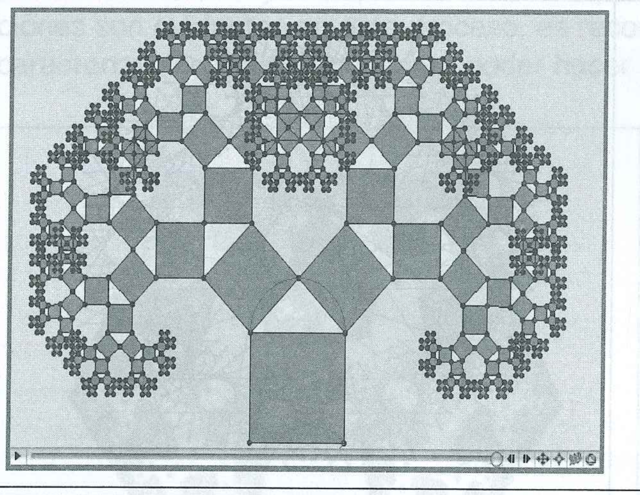


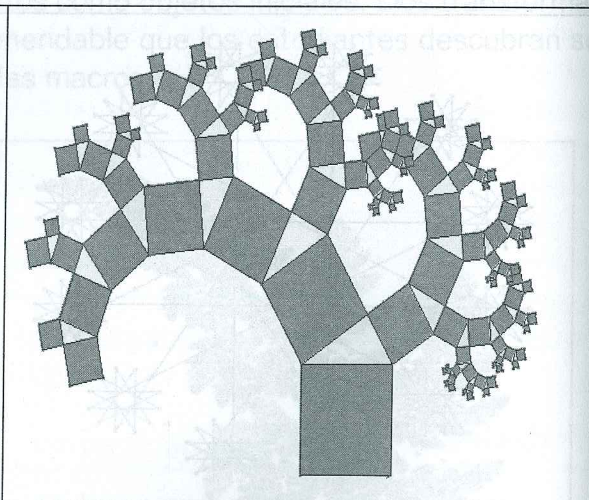
Variante 2
Estrella Fractal

Variante 3
Estrella Fractal

4.4 Fractal de Pitágoras

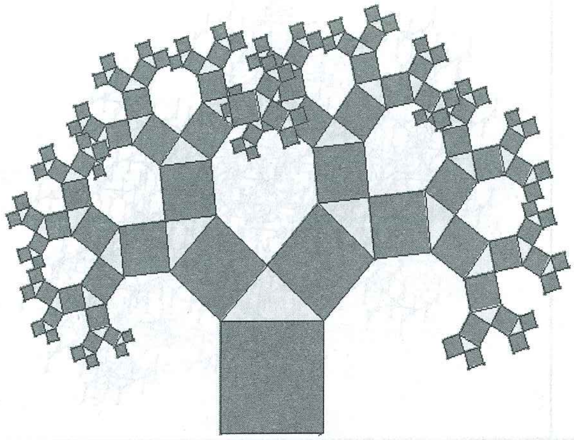
A partir del teorema de Pitágoras, se pueden construir diversos dibujos dinámicos. Una interesante alternativa es la de dibujar sobre los catetos del triángulo, polígonos regulares, e inclusive, semicírculos o círculos. Una pregunta que surge espontáneamente, que debe responder el estudiante, es si en el teorema de Pitágoras, se cumple con dicho cambio.



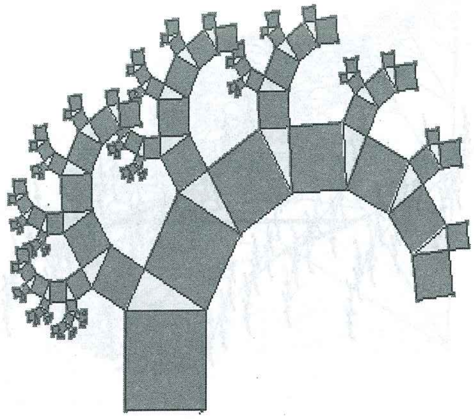


Fractal de Pitágoras

Variante 1
Fractal de Pitágoras



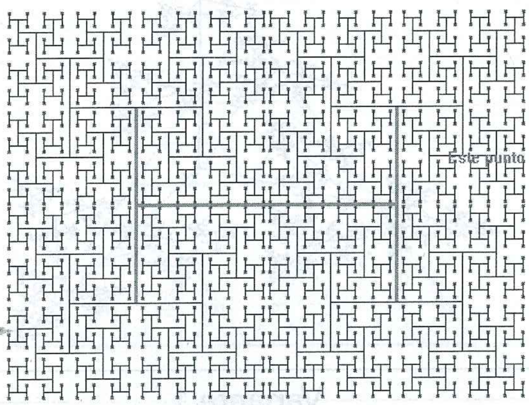
Variante 2
Fractal de Pitágoras



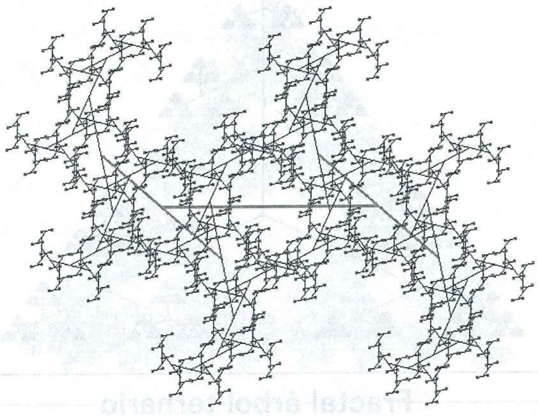
Variante 2
Fractal de Pitágoras

4.5 Familia H-fractal

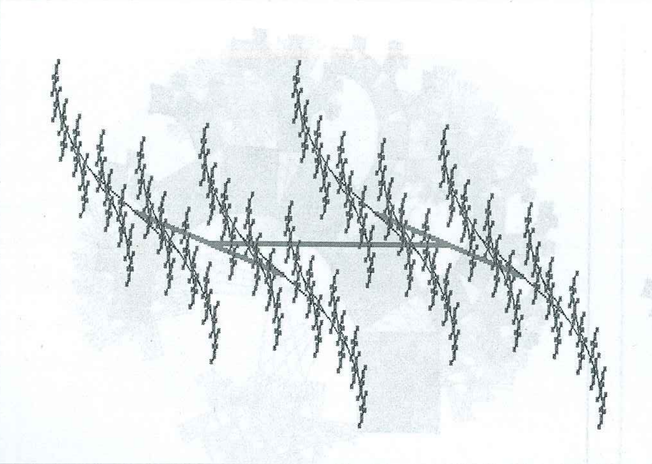
Como ejemplo de curvas que llenan una superficie cerrada, se propone la representación del H-fractal. Es importante usar como factor de homotecia $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$, y descubrir los parámetros apropiados para las traslaciones y rotaciones en las dos transformaciones contractivas que conforman su IFS.



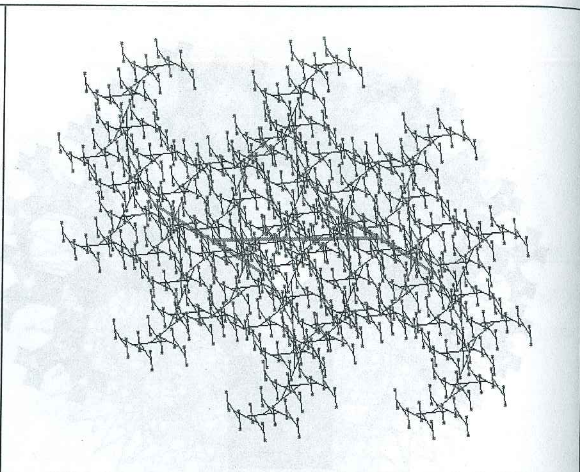
H-Fractal



Variante 1
H-Fractal



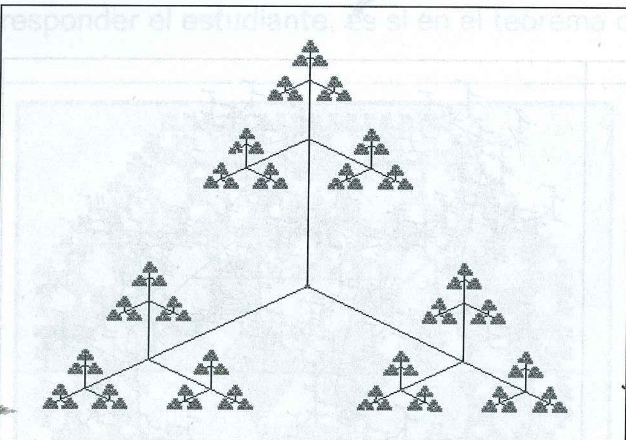
Variante 2
H-Fractal



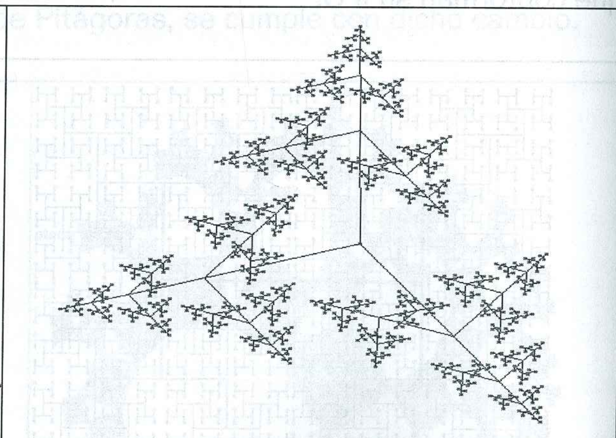
Variante 3
H-Fractal

4.6 Familia fractal árbol ternario

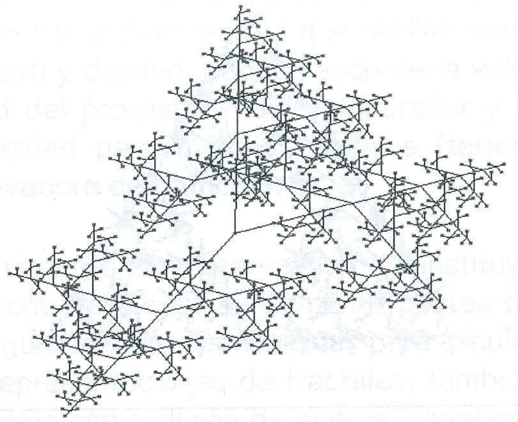
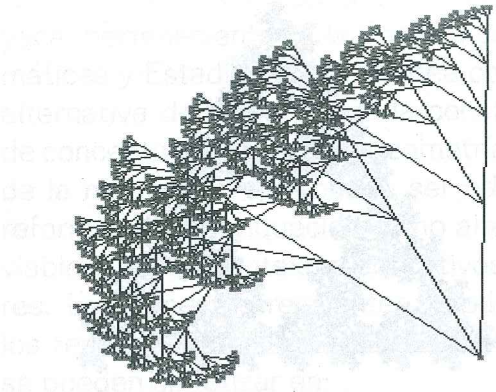
Una construcción alterna a partir del dibujo-dinámico del fractal binario puntual, en donde se dibuja el segmento que une los dos puntos iniciales, permite obtener representaciones de fractales tipo ramificación. Se deben descubrir los parámetros de las tres transformaciones que conforman el IFS del modelo fractal.



Fractal árbol ternario

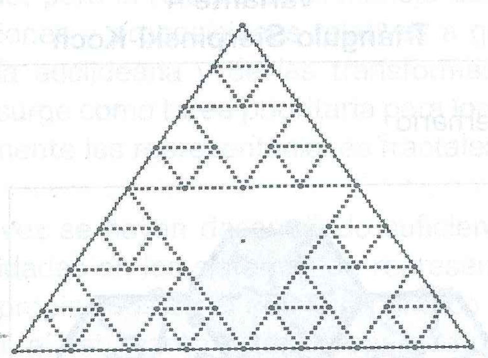
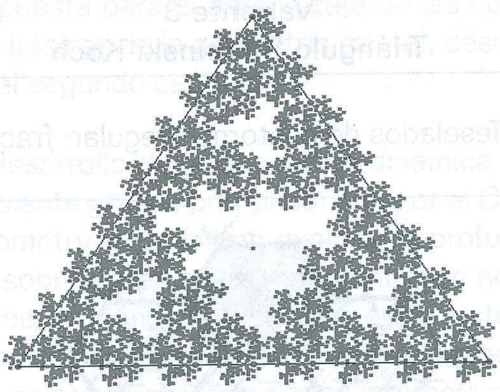


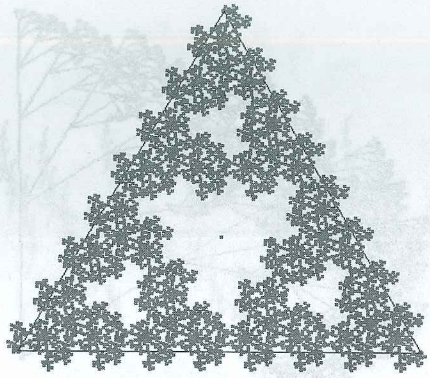
Variante 1
Fractal árbol ternario

	
Variante 2 **Fractal árbol ternario**	**Variante 3** **Fractal árbol ternario**

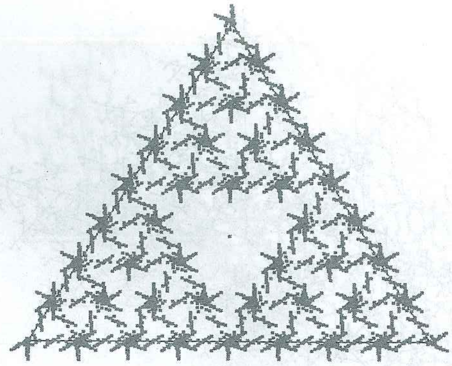
4.7 Familia de fractales triángulo Sierpinski-Koch

Esta construcción es un ejemplo de la representación aproximada del atractor de un fractal 2-variable, cuyo atractor es llamado superfractal. Es importante notar que se obtiene una teselación del plano cuyas "baldosas" tienen contorno fractal (generado por la curva de Koch) y son de distintos tamaños, de acuerdo con el factor de homotecia elegido para construir el triángulo de Sierpinski.

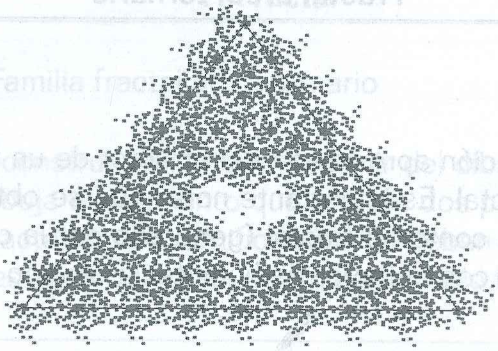
	
Triángulo Sierpinski-Koch	**Variante 1** **Triángulo Sierpinski-Koch**



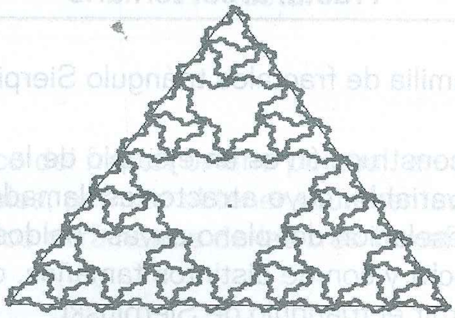
Variante 1
Triángulo Sierpinski-Koch



Variante 2
Triángulo Sierpinski-Koch

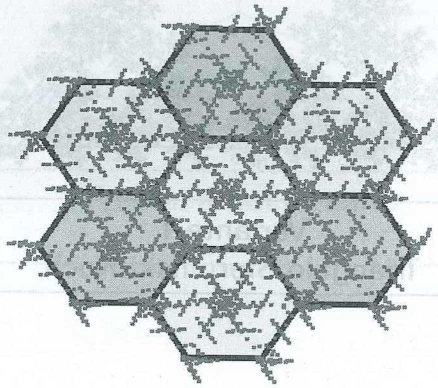


Variante 3
Triángulo Sierpinski-Koch

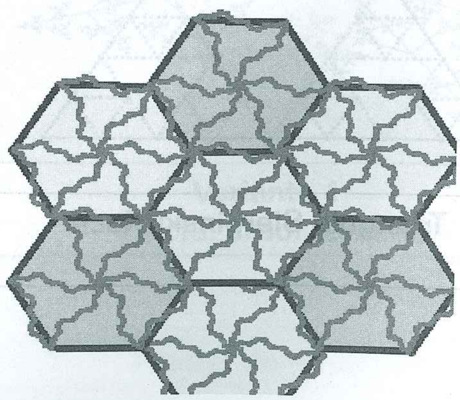


Variante 4
Triángulo Sierpinski-Koch

3.8 Teselados de contorno irregular: fractal árbol ternario



Teselación sobre bases Hexagonales
Variante1



Teselación sobre bases Hexagonales
Variante1

Las construcciones de modelos fractales se deben hacer para niveles que oscilan entre el sexto y décimo, dependiendo de la velocidad del procesador del computador y la capacidad para manejar gráficos (tarjeta aceleradora de gráficos).

Una variante muy interesante la constituye el hecho de dibujar únicamente puntos de las figuras básicas construidas para simular las representaciones de fractales, también conocida como "lluvia de puntos", consideradas como aproximaciones visuales bastante aceptables del atractor.

En síntesis, las representaciones expuestas permiten que el estudiante descubra las propiedades básicas en los distintos tipos de geometría usadas en las figuras construidas; mediante la simulación, determina las propiedades de la composición de traslaciones, rotaciones, simetrías, homotecias y en general de transformaciones afines. Tales construcciones son el propósito de la actividad, pero la riqueza en el manejo de las relaciones y proposiciones relativas a geometría euclideana y de las transformaciones, surge como tarea prioritaria para lograr finalmente las representaciones fractales.

Una vez se hayan desarrollado suficientes actividades en los sistemas de representación propiciados en el ambiente grafico del Cabri, el estudiante estará preparado para la construcción formal de los conceptos fractales a partir de la noción de estructura.

5. Consideraciones Finales

Esta propuesta didáctica, producto de la experimentación con varios grupos de estudiantes de la asignatura de Geometría de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), con sede en Tunja, Boyacá, pertenecientes a la Escuela de Matemáticas y Estadística, se plantea como una alternativa de trabajo para la construcción de conceptos relativos a la geometría fractal de la naturaleza, que puede ser adoptada, reformulada y enriquecida como alternativa viable en otros contextos educativos similares. Los aspectos relevantes, producto de los resultados del trabajo de investigación se pueden sintetizar en:

Los ambientes de geometría dinámica, proporcionan las herramientas necesarias para re-crear las construcciones fractales, brindan un espacio propicio para ejercitar la imaginación, desarrollan el pensamiento espacial, explorando los sistemas geométricos y potencian la capacidad creadora de los estudiantes. En el presente trabajo, se enfatizan los sistemas semióticos de representación propiciados por la pizarra electrónica, correspondientes a la fase de representación-modelación, dentro de la propuesta para el aprendizaje de las nociones básicas de la geometría fractal, descrita en el segundo capítulo.

El desarrollo de la geometría dinámica y el ambiente gráfico proporcionado por el Cabri Geometry II, permiten explorar y profundizar sobre sistemas de representación novedosos, en donde la distinción entre sistema y estructura se hace evidente, en la medida que se hacen construcciones interactivas.

En la construcción de los dibujos-dinámicos de Cabri Geometry II, descritos en este trabajo, es muy importante, determinar cuales son los parámetros elegidos más apropiados, para dotar de mayor dinámica a tales construcciones, usando las opciones de desplazamiento y animación contenidas en el menú. De tal elección depende el éxito en la riqueza de las situaciones problemáticas planteadas y la amplitud de los sistemas semióticos que nos pueda proporcionar el modelo construido.

Los problemas geométricos que surgen en las distintas fases de construcción de un dibujo-cabri, abarcan las proposiciones básicas elementales de la geometría euclidea con sus enfoques sintético y absoluto, de la geometría analítica, de la geometría proyectiva, de la geometría de las transformaciones, de la geometría afín (espacio de afinidades regulares), del modelo hiperbólico y esférico de las geometrías no euclidianas y de la fractal. Esto, complementado con algunos elementos teóricos de vectorial y las operaciones básicas en el espacio vectorial real (1D, 2D y 3D).

Las situaciones problemáticas acá planteadas, se pueden tipificar como abiertas ("blandas", en el sentido de J. M. Laborde), pues obedecen a situaciones menos exigentes (en términos de cantidad de parámetros, no de complejidad). Dichas situaciones son más creativas que descriptivas, poseen características que propician la imaginación y el aprendizaje por descubrimiento. El uso del computador como mediador de aprendizaje implica la modificación de los problemas planteados de manera tradicional, de las preguntas y cuestionamientos, de los enfoques para su solución y hasta en la interpretación de los resultados.

Algunos atractores generados por sistemas iterados de funciones, con apariencia distinta, contienen una estructura básica común; la evidencia de este hecho clave, es demostrado con el desarrollo de las actividades propuestas. Las macro-construccciones del Cabri, son las herramientas que permiten simular los operadores de iteración y retroalimentación en el proceso de construcción de fractales.

Las posibilidades de estos sistemas semióticos de representación externos (pizarra electrónica), son prácticamente ilimitados. Desde el espacio discreto de la pantalla del computador (o calculadora), y de acuerdo con una buena resolución de pantalla, las representaciones gráficas son percibidas por la mente como un proceso continuo (abstracción reflexionante), tal vez de manera espontánea. Las familias de fractales determinadas por los parámetros establecidos o fijados en la fase de construcción, permiten explorar amplios campos en la visualización de aproximaciones de atractores correspondientes a familias de sistemas iterados de funciones en donde subyacen estructuras similares.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSINA, Claudi y TRILLA, Enric. Lecciones de álgebra y geometría, curso para estudiantes de arquitectura. Barcelona: Editorial Gustavo Gili S.A., 1984.

BARNSLEY, Michael. Fractals everywhere. San Diego: Academic Press INC, 1988.

BRIGGS, John. Fractals, the patterns of chaos. Discovering a new aesthetic of art, science and nature. New York: Touchstone Simon & Shuster Inc, 1992.

BRIGGS, John y PEAT, F. David. Espejo y reflejo, del caos al orden. Barcelona: Gedisa Editorial, 1994.

ERNST, Bruno. El espejo mágico de M. C. Escher. Alemania: Taschen, 1994.

GUZMÁN Miguel, y otros. Estructuras fractales y sus aplicaciones. Barcelona: Editorial Labor, 1993.

HOFSTADTER, Douglas R. Gödel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle. Barcelona: Tusquets Editores, S.A, 1987.

LABORDE Colette. Soft and hard constructions with Cabri : contribution to the learning of mathematics. Bogota: XVII Encuentro de Geometría, Universidad Pedagógica Nacional, 2006.

LABORDE Colette. Cabri Geometry: una nueva relación con la geometría. Grenoble: Universidad Joseph Fourier, IUFM, 1998.

LAUWERIER, Hans. Fractals. New Jersey: Princeton University Press, 1987.

MANDELBROT, Benoit. Los objetos fractales, forma azar y dimensión. Barcelona: Tusquets Editores, S.A, 1984.

MANDELBROT, Benoit. The fractal geometry of nature. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.

MASON, John. Pensar matemáticamente. Madrid: Editorial Labor, 1989.

MASSOPUST, Peter R. Fractal functions, fractal surfaces y wavelets. San Diego: Academic Press, 1994.

NOVAK, Joseph y GOWIN, Bob. Aprender a aprender. Barcelona: Editorial Martínez Roca, 1988.

PEITGEN, Heinz-Otto y otros. Fractals for the classroom, part one, introduction to fractals and chaos. New York: Springer-Verlang, 1992.

PEITGEN, Heinz-Otto y otros. Fractals for the classroom, strategic activities volume Two. New York: Springer-Verlang, 1992.

PEITGEN, Heinz-Otto y RICHTER, P. H. The beauty of fractals. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

SCHROEDER, Manfred R. Fractals, chaos, power laws. Minutes from an infinite paradise. New York: W. H. Freeman and Company. 1996.

SUÁREZ, S. Publio. El aprendizaje de la geometría fractal, Tesis meritoria de magíster en educación, Universidad Pedagógica Nacional. Dirigida por Novoa, P, Alberto. Tunja: Publicaciones Universitarias, 1996.

VASCO, Carlos E. Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas. Volumen I y II Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, MEN, 1992.

WEGNER, Tim y TYLER, Bert. El mundo de los fractales, convierta los números en una realidad fractal. Madrid: Ediciones Anaya Multimedia S.A, 1995.

TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN

SUÁREZ, Publio y Grupo investigador. La geometría fractal como herramienta para modelar la naturaleza. Tunja: IIFA-UPTC. 2002.

SUÁREZ, Publio y Grupo investigador. Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas en Boyacá. Tunja: MEN-IIFA-UPTC, Escuela Normal Superior, Colegio Silvino Rodríguez, Colegio Rafael Reyes y Colegio de Sugamuxi, 2002.

MONOGRAFÍAS

AYALA, Jairo. Simbiosis Matemática Arte. Dirigida por Ms. Suárez, Publio. Tunja: Licenciatura en Matemáticas y Física. UPTC, 1997.

AYALA, Jairo. Introducción a los sistemas dinámicos y la teoría del caos. Dirigida por Ms. Suárez, Publio. Tunja: Especialización en Docencia de la Matemática. UPTC, 1998.

HAYTHER, Laiton y BALLÉN Omar. Fractales en 3D. Dirigida por Ms. Suárez, Publio. Tunja: Licenciatura en Matemáticas y Física. UPTC, 2001.

QUINTERO, Leonardo. Fractales autosemejantes como modelos matemáticos para la representación de objetos y fenómenos de la naturaleza. Dirigida por Ms. Suárez, Publio. Tunja: Licenciatura en Matemáticas y Física. UPTC, 2000.

ROMERO, Alfonso y TORRES Javier. Implementación de nuevas tecnologías en el estudio de los sistemas dinámicos y la teoría del caos. Dirigida por Ms. Suárez, Publio. Tunja: Licenciatura en Matemáticas y Física. UPTC, 2003.

ROLDÁN, Marisol. Los fractales y la naturaleza, V 1.0. Dirigida por: Ing Gilberto Calderón y Publio Suárez. Tunja: Universidad Antonio Nariño. Ingeniería de Sistemas. 1998.