

# LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE INFINITO A LUZ DEL MODELO DE VAN HIELE Y LA ENTREVISTA SOCRÁTICA

Alba Soraida Gutiérrez Sierra<sup>1</sup>  
Marlon Roger Hueza Acevedo<sup>2</sup>  
Martha Yanira Luis Ayala<sup>3</sup>

---

1 Doctorando en Educación, Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología Panamá  
albasoraidagutierrez@gmail.com

2 Candidato a Magister, Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología Panamá  
rogerhueza@hotmail.com

3 Doctorando en Educación, Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología Panamá  
Mathayaniraluis@yahoo.es

## RESUMEN

Se pretende mostrar los avances de una investigación en curso, en el marco del desarrollo de tesis doctoral titulada en desarrollo del programa Doctorado en Ciencias de La Educación que ofrece la Universidad Metropolitana de Educación Ciencia y Tecnología (UMECIT-Panamá), cuyo objetivo es analizar cómo comprenden los estudiantes de último año de educación media, el concepto de infinito y su relación con el concepto de función de variable real, siendo el infinito un objeto matemático abstracto; por tanto, la problemática abordada en la presente investigación muestra que cuando los estudiantes se acercan al concepto del infinito, solamente lo hacen desde una noción intuitiva, relacionada con cantidad o tamaño, esta aproximación genera una serie de contradicciones conceptuales frente al hecho de que ellos no pueden establecer con suficiencia y claridad la conexión directa que tiene este con otros conceptos matemáticos (Dolores, 2004). Para conseguir la descripción de la comprensión, se utilizó como instrumento de indagación el método Socrático basado en la construcción de un guion de entrevista semiestructurada. A través de la implementación del instrumento se proponen descriptores hipotéticos que se van refinando. De acuerdo con lo anterior, la investigación tiene un alcance descriptivo de carácter mixto, de esta manera se fortalece el estudio haciendo uso de narraciones, verbalizaciones de los actores objeto de estudio y datos numéricos, sabiendo que los estudios mixtos permiten obtener una mejor evidencia y comprensión de los fenómenos, facilitando el fortalecimiento de conocimientos teóricos.

**Palabras Clave:** Infinito, Funciones, Comprensión, Método Socrático, Modelo de van Hiele.

## ABSTRACT

It is intended to show the progress of an ongoing investigation, within the framework of the development of a doctoral thesis titled in development of the Doctorate in Education Sciences program offered by the Metropolitan University of Education, Science and Technology (UMECIT-Panamá), whose objective is to analyze how middle school seniors understand the concept of infinity and its relationship to the concept of a real variable function, with infinity being an abstract mathematical object; therefore, the problems addressed in this research show that when students approach the concept of infinity, they only do so from an intuitive notion, related to quantity or size; this approach generates a series of conceptual contradictions compared to the fact that they cannot adequately and clearly establish the direct connection that this has with other mathematical concepts (Dolores, 2004). To achieve the description of understanding, the Socratic method based on the construction of a semi-structured interview script was used as an instrument of inquiry. Through the implementation of the instrument, hypothetical descriptors are proposed which are refined; In accordance with the aforementioned, the research has a descriptive scope of mixed character; in this way, the study is strengthened using narratives, verbalizations of the actors under study, and numerical data, knowing that mixed studies allow obtaining better evidence and understanding of phenomena facilitating the strengthening of theoretical knowledge.

**Key Words:** Infinity, Functions, Understanding, Socratic Method, van Hiele's Model

## INTRODUCCIÓN

La educación es un derecho y un camino que permite luchar contra la pobreza y la desigualdad social, debido a su estrecha relación entre los aspectos económicos y sociales, en un mundo de tantas oportunidades a la vez tan exigente; ya no es suficiente solo leer y escribir, es necesario fortalecer más que las competencias lectoras y escritoras otras que le permiten al hombre ser participativo en el contexto en quiera desempeñarse. En consecuencia, no basta solo la primaria o el bachillerato; el tener un título profesional, o saber hacer un oficio específico se convierte en herramientas que hacen al ser humano competir en el mercado laboral. A mayor educación mayor posibilidad de superar los problemas del entorno, asegurar un ingreso y mejorar la calidad de vida.

La educación es la herramienta más poderosa que transforma vidas, permite consolidar la paz, eliminar la pobreza e impulsar el desarrollo sostenible; al examinar detenidamente la educación desde sus diferentes perspectivas, se evidencia que ésta es necesaria en muchos aspectos; por resaltar algunos de estos, se tiene que la educación ayuda, a alcanzar mejores niveles de bienestar social y de crecimiento económico, nivela las desigualdades económicas y sociales, propicia la movilidad social de las personas, ayuda a acceder a mejores niveles de empleo para elevar las condiciones culturales de la población, amplía las oportunidades laborales de los jóvenes, vigoriza los valores cívicos que fortalecen las relaciones humanas, encamina el avance democrático y el fortalecimiento del Estado de derecho e impulsa el avance

de la ciencia, la tecnología y la innovación (Batallosa, 2006).

De acuerdo con lo anterior, en cuanto a la importancia de la educación media, se establece que el concepto de educación, como bien público social y derecho universal, repercute directamente en la calidad de la educación media como puente hacia la educación superior, con base en su pertinencia y la inclusión social (CRES, 2008).

Por su parte, la educación media es un requisito que permite a todos los ciudadanos una participación socioeconómica a partir de las competencias y habilidades necesarias para ingresar a un mercado laboral; por tanto, es necesario combatir factores como el bajo interés de los jóvenes por asistir a los establecimientos educativos, la falta de dinero por la necesidad de trabajar, el maltrato escolar, la falta de cupos, el embarazo a temprana edad, entre otras razones, de acuerdo con (Acosta, García, y Maldonado, 2016).

Sin embargo, Sánchez, Velasco, Ayala, & Pulido (2016), indican algunas razones que explican la no culminación del segundo ciclo educativo de educación media. Entre ellas se resalta, la deserción escolar (tasa que oscila entre 6% y 8%), además de los problemas en el hogar, la extra edad de los estudiantes, así como también dificultades económicas y el haber cursado primaria en una institución que no ofrece educación media. Es de anotar que la deserción más alta se da entre los grados quinto y sexto, pues uno de cada cinco estudiantes no continúa con el primer ciclo de educación básica secundaria, todo esto debido a la transición que ocurre entre la educación básica primaria y el inicio del bachillerato.

En consecuencia, se requiere tomar acciones a nivel institucional, para que los estudiantes logren llegar a la educación media.

En lo relacionado con el proceso de educación, las matemáticas son un saber imprescindible para conocer y comprender el universo. Ahora bien, una de las tareas de la educación es resignificar la cultura matemática, como un trabajo creador en el que maestros y estudiantes reorganizan el saber para utilizarlo en la realidad y en solucionar problemas de la vida. Es de anotar que el pensamiento matemático “se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas” (Cantoral y otros, 2005, p.19).

Se resalta que la problemática abordada, desde el contexto de la presente investigación, muestra que cuando los estudiantes se acercan al concepto del infinito, solamente lo hacen desde una noción intuitiva y relacionada con cantidad o tamaño, generando una serie de contradicciones conceptuales frente al hecho de que ellos no pueden establecer con suficiencia y claridad la conexión directa que tiene el infinito con otros objetos matemáticos.

Respecto al tema, como lo establecen Attorps, Björk y Radic, (2016,p.sf.) “se evidencia que el bajo rendimiento de los estudiantes en cursos de cálculo diferencial e integral, se encuentra asociado a la construcción del concepto de función”. Una de las razones más relevantes ante esta premisa, es la deficiente e incompleta comprensión del papel que juega el infinito en la teoría de los conjuntos.

Por su parte, Cantor (1955) señala: que “existe una correspondencia biunívoca

entre un conjunto y un subconjunto de sí mismo, lo que significó el establecimiento de una relación de orden para definir el infinito” (p.34). El avance en la construcción del concepto de infinito, ha sido habitualmente una polémica, por lo que ha provocado una permanente confusión en los estudiantes sobre los conceptos relacionados con él, y de esta manera se dificulta la comprensión del concepto asociado a las funciones de variable real. “Al no tener clara la relación de estos dos conceptos en el cálculo, hace que surjan consecuencias frente a la modelación de situaciones y fenómenos científicos que fundamentan su análisis y explicación a través del comportamiento de las funciones” (Dolores, 2004, p.17).

Por otro lado, en lo que respecta al concepto de función, algunos autores han demostrado la evolución de éste y sus implicaciones, “manifestando que éste está íntimamente ligado al concepto primitivo de conjunto, y a su vez, induce al desarrollo de cantidad y de número evidenciando la relación con el infinito” (Gutiérrez y Jaime, 1990).

Al respecto, de acuerdo al análisis realizado en la revisión bibliográfica, se puede evidenciar cómo algunos objetos matemáticos, a la hora de ser enseñados, generan ciertas dificultades de comprensión y aprendizaje; en ocasiones esto se atribuye al nivel del lenguaje utilizado por parte del maestro, puesto que éste no está en el mismo nivel de lenguaje de los educandos; por su parte, van Hiele () lo denomina propiedad de separación, sumado a ello la escasez de estrategias o formalidad conceptual en el momento de la enseñanza. En relación con lo anterior, es importante indagar acerca de cómo suceden ciertos procesos internos de

aprendizaje; y por ello el Modelo van Hiele admite de forma pertinente y adecuada, describir la comprensión frente a un objeto matemático específico, a demás de establecer el nivel de razonamiento que tienen los estudiantes frente al concepto de infinito; este modelo ha sido implementado en diversas experiencias educativas, respaldado en las últimas dos décadas por investigaciones a nivel de programas de maestría y doctorado, como: estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de van-Hiele (Esteban, 2003), módulo de aprendizaje para la comprensión del concepto de serie de términos positivos, (Zapata y Sucerquia, 2009), relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren (Londoño, 2017), la comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren, (Rendón y Londoño, 2011), relaciones proporcionales entre segmentos en el contexto del modelo de Van Hiele, (Ibarra, 2014), extensión del modelo de van-Hiele al concepto de área (Llorens, & Prat, 2015) y la comprensión del concepto de límite de una función en un punto en el marco de la teoría de Pirie y Kieren, (Arias y Becerra, 2015), entre otros.

Por su parte, el modelo de Van Hiele es soporte teórico en el cual se fundamentó la investigación; en efecto, este permite describir la comprensión del objeto matemático estudiado, al ubicar a los estudiantes en el nivel de razonamiento correspondiente, de acuerdo con los descriptores para cada nivel; el modelo es una propuesta que parece describir con bastante exactitud la comprensión desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales y está adquiriendo cada vez mayor aceptación a

nivel internacional en lo que se refiere a la geometría escolar. Así se confirma en los lineamientos curriculares de Matemáticas, en cuanto al pensamiento matemático avanzado.

Sobre el asunto, el modelo de Van Hiele se compone de tres elementos principales: los niveles de Van Hiele, son una estratificación del razonamiento humano en una jerarquía de niveles; las fases de aprendizaje, son los procesos que conducen al estudiante desde un nivel de razonamiento al siguiente y la percepción -insight, que es el interés original y el tema de disertación. En la teoría está implícita la idea de que los estudiantes se encuentran con obstáculos en tanto intentan, quizás sin saberlo, el ascenso desde un nivel inferior al siguiente en la escalera de los Van Hiele.

El modelo educativo de Van Hiele, tal como se utiliza actualmente, puede enunciarse de la siguiente manera:

1. Existen diferentes niveles de razonamiento de los estudiantes referidos a las Matemáticas.
2. Cada nivel supone una forma de comprensión, un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante solo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento.
3. El proceso de enseñanza debe adecuarse al nivel de razonamiento del estudiante. Una enseñanza que desarrolle en un nivel superior al de los estudiantes no será comprendida.
4. El proceso de enseñanza debe orientarse a facilitar el progreso en el

nivel de razonamiento, de forma que el progreso se haga de un modo rápido y eficaz.

Las fases de aprendizaje están orientadas desde un nivel de pensamiento a otro; Van Hiele describe el paso de un estudiante de un nivel al siguiente como una función de aprendizaje, “la transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural, tiene lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza-aprendizaje.

La transición no es posible sin el aprendizaje de un nuevo lenguaje”. El paso de un nivel al siguiente se produce a través de una específica secuencia de fases de aprendizaje.

Los Van Hiele enunciaron originalmente su modelo distinguiendo cinco niveles (Básico o nivel 0, y niveles I, II; III y IV). A través de la bibliografía sobre el tema, ellos y otros autores han ido cambiando la forma de numerar o de referirse a estos niveles. El mismo Pierre van Hiele, en la más notable revisión de su teoría, enfatiza la importancia de los tres primeros niveles, a los que se refiere como “básico o nivel visual, segundo nivel o nivel descriptivo, tercer nivel o nivel teórico”.

En el mismo trabajo, señala que los niveles superiores a estos presentan dificultades para su discernimiento y sólo tienen un interés teórico. Sin embargo, la forma más habitual de referirse a los niveles es distinguiendo cuatro niveles. Por ejemplo, en Gutiérrez y Jaime (1990) se denomina nivel I (de reconocimiento), nivel II (de análisis), nivel III (de clasificación), nivel IV (de deducción formal).

En Land (1991) se habla de nivel 0 (básico, visual o predescriptivo), nivel I (descriptivo),

nivel II (teórico) y nivel III (deductivo). Por último, de J. Llorens (1997), encontramos estos cuatro niveles añadiendo un nivel anterior, que se denomina nivel 0 o predescriptivo.

Para la investigación realizada, se resalta la nomenclatura que propone Llorens (1995), para cada nivel de razonamiento, tomando los cuatro primeros niveles de razonamiento, pues él plantea cinco y el último nivel es de un rigor demasiado formal y abstracto.

Nivel 0, predescriptivo

Nivel I, de reconocimiento visual

Nivel II, de análisis

Nivel III, de clasificación, de relación

Nivel IV, de deducción formal

Hay que tener en cuenta, para que se pueda establecer una clasificación en niveles dentro del modelo de van Hiele, los descriptores de los niveles por verificar deben cumplir con unas propiedades específicas; se enuncian de la siguiente manera: Secuencialidad fija, Adyacencia, Distinción, Separación. Es importante recordar que cada nivel tiene su lenguaje (Londoño y otros, 2017, p.12, citando a Usiskin, 1982).

**Nivel 0.** (Predescriptivo). En este nivel los estudiantes reconocen los elementos básicos aritméticos y geométricos; deben percibir y describir las figuras, formas o conceptos como un todo, enfatizándose a lo físico y concreto.

**Nivel I.** (Visual). El estudiante en este nivel reconoce las figuras y formas por su apariencia global, percibidas como objetos individuales, no abstrae las propiedades

particulares de estas y no es capaz de compararlas con otras; describe las figuras geométricas por semejanza con otros objetos, ni de las mismas características de las que está describiendo.

**Nivel II.** (De análisis). Los estudiantes analizan las partes o elementos que componen una figura geométrica y sus propiedades; a partir de este análisis puede deducir otras propiedades de las figuras, generalizándolas a las figuras de una determinada clase, por su parte, no relacionan las distintas propiedades de las figura geométricas, por lo que no pueden hacer clasificaciones de esas figuras basándose en sus propiedades, en consecuencia las deducciones y extensión de propiedades tienen un carácter informal.

**Nivel III.** (De clasificación o relación). Los estudiantes relacionan las figuras y sus propiedades. Reconocen que unas propiedades se deducen de otras y son capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para conjeturar que una propiedad se deriva de otra. Sin embargo, no reconocen la necesidad del rigor, ni la relación entre lo que han aprendido con otros sistemas deductivos que pueden ser semejantes; pueden seguir una demostración formal, pero generalmente no son capaces de reproducirla. Sin embargo, pueden clasificar lógicamente y aprender relaciones entre distintas clases de figuras, pero no comprenden la necesidad de la formalización (demostraciones generales) ni las estructuras axiomáticas.

Se sabe que el modelo de Van Hiele en distintas investigaciones se ha utilizado como una propuesta que permite describir las concepciones básicas de un tema específico, pues a través

de su implementación y desarrollo va evolucionando dichas concepciones, utilizando la indagación y cuestionamiento permanente hasta una adquisición propia del conocimiento sin ser necesario el hecho de enseñar.

En estas razones, para que una clasificación en niveles de razonamiento pueda considerarse dentro del modelo de van Hiele, es necesario que los indicadores de nivel, llamados descriptores, cumplan con propiedades específicas enunciadas a continuación:

- Propiedad 1: (Secuencialidad fija). Cada estudiante debe progresar a través de los niveles en una secuencialidad fija, esto es, "Un estudiante no puede estar en un nivel  $n$  de van Hiele sin haber superado el nivel  $n-1$ "
- Propiedad 2: (Adyacencia). El objeto de percepción del nivel  $n-1$  se convierte en el objeto de pensamiento del nivel  $n$ .
- Propiedad 3: (Distinción). El nivel  $n$  requiere de una reorganización o reinterpretación del conocimiento adquirido en el nivel  $n-1$ , esto es, la percepción de una nueva estructura.
- Propiedad 4: (Separación). Dos personas que razonen en diferentes niveles no podrán entenderse, en lo que se refiere al objeto de su razonamiento matemático.
- Propiedad 5: (Cada nivel tiene su lenguaje). Hay una estrecha relación entre el lenguaje y los niveles hasta el punto de que cada nivel tiene un tipo de lenguaje específico, de modo que las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a cada uno de los niveles de van Hiele, no sólo se reflejan en las formas de resolver

problemas, sino que, sobre todo, se manifiestan en la forma de expresarse y en el significado que se da o se puede dar al vocabulario específico (Jurado y Londoño, 2005).

En consecuencia con el objetivo general de la investigación desarrollada, al buscar describir cómo comprenden los estudiantes el concepto de infinito a través del concepto de función de variable real, se plantearon descriptores hipotéticos de acuerdo a cada nivel establecido en el modelo de Van Hiele; sobre el asunto se entenderá por descriptores las principales características y condiciones que permiten reconocer y clasificar, a partir del trabajo del estudiante, cada uno de los niveles de razonamiento que contempla el modelo y afín con el objeto de estudio que contempla esta investigación matemático en que se encuentre. (Jurado y Londoño, 2005; pág. 9).

En síntesis, se puede decir que la capacidad de hacer demostraciones, deducciones, marca la frontera entre los niveles I – II y III – IV. Así, un estudiante que razone en este nivel podrá hacer conjeturas relativas a propiedades de los ángulos de un rectángulo a partir de otras propiedades referidas a sus lados; sin embargo, no es capaz de distinguir la necesidad de esas propiedades, de fijar las condiciones mínimas para obtenerlas.

## METODOLOGÍA

Hay que recalcar que el objetivo de estudio es describir la comprensión sobre el concepto de infinito en su relación con el concepto de función de variable real, que presentan los estudiantes de último año de Educación Media. A partir de los objetivos a alcanzar y las preguntas a

las que se pretende dar respuesta, la investigación tiene un alcance descriptivo de carácter mixto. En la metodología mixta se combinan técnicas, métodos, aproximaciones, dentro de la misma investigación como lo establece Johnson y Onwuegbuzie (2004), los actores objeto de estudio y datos numéricos, permiten en los estudios mixtos obtener una mejor evidencia y comprensión de los fenómenos facilitando el fortalecimiento de conocimientos teóricos.

De esta manera el trabajo se orienta a explorar e identificar las dificultades que presentan los estudiantes al realizar las tareas de interpretación, conversión, construcción, relacionadas con el concepto de infinito en el contexto del modelo de van Hiele y sus diferentes representaciones ya sea verbal, algebraico o gráfico.

Asu vez el tipo y diseño de investigación, es el diseño no experimental - transeccional o transversal descriptivo; en este sentido el diseño no experimental permite observar los fenómenos tal y como se dan en el contexto natural para analizarlos (Sullivan, 2009) citado por Hernández (2014; pág. 152).

En consecuencia, la investigación se enmarcó dentro del enfoque cualitativo; es importante aclarar que el tema que ocupó el estudio se centró en trabajar con jóvenes en la etapa de transición del colegio a la universidad y los que se sitúan en el primer semestre enfrentando el curso de cálculo, en el cual aparece la noción de infinito con relación a los conceptos de límite, asíntotas de funciones racionales, sucesiones infinitas y series e integrales impropias.

Al concretar el nivel de comprensión y razonamiento que poseen estudiantes, podrá servir como fundamento teórico en educación matemática frente a este objeto matemático.

Para el tipo de investigación, se abarca el estudio de casos el cual lo define Hernández et al (2014) como “una investigación que mediante los procesos cuantitativo, cualitativo o mixto; se analiza profundamente una unidad para responder al planteamiento del problema, probar hipótesis y desarrollar teoría” (p.123).

## DESARROLLO

El estudio realizado, utilizó como instrumento de indagación permanente el método de entrevista semiestructurada de carácter socrático, enmarcada en el modelo educativo de van Hiele; dicha entrevista fue usada para describir el razonamiento que se desarrolla en las mentes de los individuos, mediante preguntas orientadas a descubrir e interpretar “lo que es”. El procedimiento consistió en hacer preguntas a un grupo de estudiantes, cuyas respuestas le permiten al investigador encontrar información valiosa para clasificar a cada estudiante participante en uno de los niveles de razonamiento que propone el modelo de van Hiele. La secuencia de preguntas varía con cada entrevista, dependiendo de las respuestas del entrevistado.

Dentro de las técnicas utilizadas para la recolección de la información, se desarrolló la entrevista semiestructurada de carácter socrático; se propusieron inicialmente varios descriptores hipotéticos de acuerdo a cada nivel, aunque hay que aclarar que solo se trabajaron los cuatro primeros niveles, pues Van Hiele

considera que el nivel cinco es de un rigor teórico demasiado elaborado. Durante el proceso de verificación y refinamiento de los descriptores, se demostró si estos cumplían y correspondían a cada nivel de razonamiento, y luego se describió la comprensión de los estudiantes en relación con el concepto de infinito, y el concepto de función de variable real. Esta interacción permite, según Sandoval (2002), poder comprender la realidad tanto en su lógica interna como en su especificidad.

La aplicación de la entrevista socrática, enmarcada en el modelo de Van Hiele, propende por un razonamiento crítico y reflexivo en torno al concepto que se está trabajando. El método empleado por Sócrates consta de dos partes: destructiva una, creativa la otra. En la primera etapa, Sócrates toma como punto de partida la concepción del interlocutor acerca del asunto en cuestión, permitiéndole descubrir las contradicciones y las faltas de tal concepción. En la segunda etapa, llamada mayéutica, Sócrates se ve a sí mismo como una partera que ayuda a su interlocutor a dar a luz, a descubrir, a desvelar la verdad que lleva en sí mismo, a quitarle a esta verdad el velo que la cubre.

Sin duda, al definir la entrevista Socrática, esta posee características de la entrevista semi estructurada utilizada especialmente para estudiar el razonamiento que se desarrolla internamente en los individuos, mediante preguntas orientadas a descubrir e interpretar “lo que es” (Jurado y Londoño, 2005). Su procedimiento se realiza mediante preguntas reflexivas a los estudiantes, cuyas respuestas permitieron al investigador encontrar información valiosa para verificar los descriptores hipotéticos, describir y reconocer el nivel del razonamiento.

El método socrático, nace de los diálogos que sostenía Sócrates para llevar al individuo a encontrar la verdad sobre conocimiento. Por tal razón se considera como una estrategia para promover el pensamiento crítico; de este modo, el estudiante es quién descubre el conocimiento, utilizando una serie de preguntas y el análisis de sus propias respuestas, es decir, se construye conocimiento a partir de la reflexión crítica de una situación motivada. En este sentido, la elaboración de la entrevista socrática, debió ser cuidadosamente estructurada por varios aspectos, el primero es el lenguaje factor fundamental para determinar si el estudiante ha comprendido los conocimientos matemáticos; el vocabulario, las relaciones significativas entre los conceptos, entre otros aspectos, fueron factores de análisis en el desarrollo de la investigación. En estas razones, se resalta la descripción que realiza De la Torre (2003) sobre el método socrático y el modelo de van Hiele, trayendo algunos apartes de su artículo “El método socrático y el modelo de van Hiele”

En este proceso, el diálogo simple pero complejo a la vez, evidencia cómo la metodología de Sócrates aporta al modelo; en el fondo, induce la manera en que se puede enseñar al estudiante un concepto desde su propia experiencia, modificando de cierta forma lo aprendido y volviendo a analizar, reflexionar e inferir otra perspectiva del objeto matemático, entendido como la estimulación para orientar el razonamiento.

## RESULTADOS

A continuación, se exhibirá un descriptor para cada nivel de razonamiento, como producto de la construcción y refinamiento

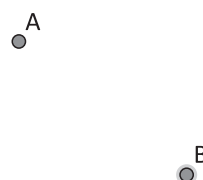
de la entrevista semiestructurada de carácter socrático, además de una muestra de algunas preguntas que componen la entrevista socrática.

**Nivel 0 (predescriptivo).** Reconoce en la recta real la ubicación de los diferentes conjuntos numéricos que la componen.

**Descriptor de nivel:** Diferencia los conceptos de recta y segmento de recta.

**Preguntas asociadas:**

Dados los puntos A y B, unirlos a través del trazo más corto.



Después de realizar el trazo más corto entre A y B, ¿qué nombre podría recibir este trazo y por qué?

¿Cuántos distintos trazos se pueden construir al realizar la unión entre el punto A y el punto B?

En la siguiente figura, ubica dos puntos cualesquiera C y D entre los puntos A y B.

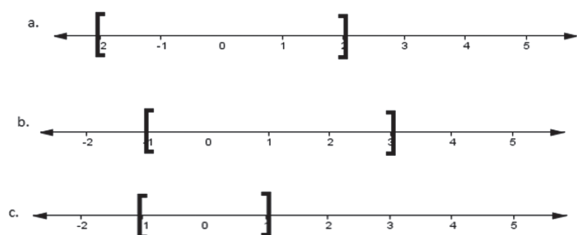


**Nivel I (de reconocimiento visual).** Aplica de forma visual segmentos de línea y que a partir de ellos se puede establecer un intervalo o subconjunto numérico en los reales.

**Descriptor de nivel:** Determina un intervalo de números reales como un subconjunto del conjunto de todos los reales.

### Preguntas asociadas:

Observa los siguientes intervalos en la recta real.



¿Podrías indicar el intervalo que tiene la mayor cantidad de números reales?

**Nivel II, (de análisis).** Tiene claro que los reales están compuestos por infinitos subconjuntos propios infinitamente divisibles.

**Descriptor de nivel:** Analiza procesos que permiten construir biyecciones entre un conjunto infinito y un subconjunto infinito propio de él, infiriendo que podrían tener la misma cantidad de elementos.

### Preguntas asociadas:

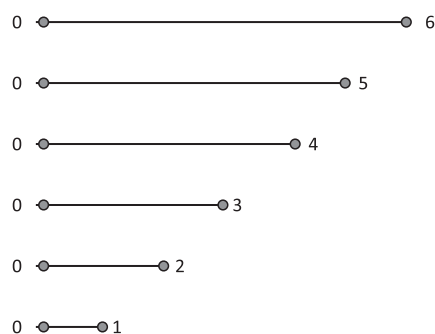
Teniendo en cuenta el conjunto de los números Naturales, construye un conjunto en el cual estén contenidos los veinte primeros números naturales pares. ¿Será que se puede generalizar de alguna manera la forma de hallar a cada uno de los números naturales pares?

Al realizar una comparación entre la cantidad de elementos que tienen los números Naturales pares y la cantidad de elementos que tienen los números Naturales, ¿Podrías indicar qué conjunto tiene mayor cantidad de números?

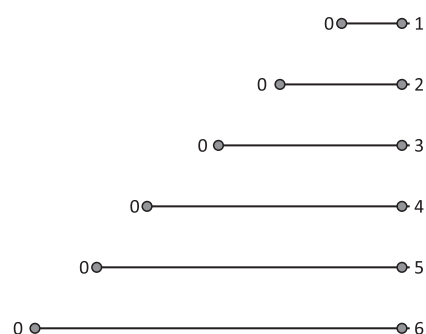
### Nivel III, (de clasificación, de relación).

Verifica que dado cualquier intervalo finito, a cada uno de sus elementos le corresponde infinitos números reales, tantos como números reales hay.

Al observar la siguiente gráfica, ¿podrías indicar que intervalos tienen la mayor y menor cantidad de elementos?



Observa la siguiente grafica, al relacionar cada uno de los números del intervalo  $[0,6]$  con cada uno de los números del intervalo  $[0,2]$ ,  $[0,3]$ ,  $[0,4]$ ,  $[0,5]$ ,  $[0,1]$  ¿sera que algun número queda sin relacionarse ?



## CONCLUSIONES

Al estudiar y analizar el concepto de infinito, éste no se reduce solamente a cálculos, problemas algebraicos o valores numéricos exageradamente grandes; el infinito está presente, ya sea infinitamente pequeño o infinitamente grande, Cantoral (2005), es allí donde el estudiante al relacionar

el concepto del infinito solamente con cantidad, no puede establecer la diferencia entre e infinito actual e infinito potencial.

Existen números reales tan pequeños como se quiera, pero diferentes del cero. ¿Se alcanza el límite? La expresión tiende a ser reserva para el caso donde no se alcanza el límite. El paso al límite otro obstáculo que parece importante es el paso de finito a infinito (...) razonamiento basado en la inducción, pensamiento inductivo basado en cálculos numéricos. Se basan esencialmente sobre la idea geométrica de la diferencia entre una magnitud variable y una magnitud constante, la cual es su límite (p.214).

Se pretende con la entrevista, hacer que los estudiantes identifiquen la recta con sus características y, a partir de ella, la relacionen con la complejidad que implica la recta real, evidenciando que en ella hay contenidos infinitud de puntos que representan números reales; en donde al

momento de establecer una relación entre una recta y la recta real ellos puedan inferir que la recta tiene infinitos puntos tantos como números reales hay.

La noción de infinito, construida a lo largo de la entrevista socrática, está influenciada por la duplicidad en la enseñanza por encima de la individual, tal vez debido a la información que reciben los estudiantes al respecto de la definición de infinito y recta. Con relación a la dualidad particularización y generalización, se desenvuelven mejor en la primera parte de la entrevista, detectando que en pocos casos se trata de dar nociones más generales a partir de la exploración de los ejemplos. Se puede analizar que la mayoría de los estudiantes distinguen la densidad de los números reales, pero no hay claridad en el concepto de infinito, en algunos casos donde el lenguaje no es adecuado para el nivel donde está el estudiante.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arias, J., & Becerra, M. (2015). La comprensión del concepto de límite de una función en un punto en el marco de la teoría de Pirie y Kieren. Antioquia: Universidad de Antioquia
- Arrigo, G., D'Amore, B., and Sbaragli, S. (2011). Infiniti. Trento: Erickson. [En curso de traducción en idioma español: Bogotá: Magisterio].
- Attorps, I., Björk, K., y Radic, M. (2016). Generating the patterns of variation with GeoGebra: the case of polynomial approximations. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 47(1), 45-57. DOI:10.1080/0020739X.2015.1046961
- Cantor G. (1955) Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers. Republication of the original translation of 1915. Dover Publication, Inc. New York.
- Cantor, (1932). Contribution to the founding of the theory of transfinite numbers, Dover Publications. Inc.
- Cantoral, R. & otros (2005) Desarrollo del Pensamiento Matemático Editorial Trillas, México.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2005) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis Editorial Trillas, México.
- Dolores, C., Valero, M. (2004). *Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en la situación escolar*. Epsilon, THALES, 58, 20(1), 45-73.
- Esteban, P. (2003). Estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de van Hiele. Valencia. 2003. Tesis doctoral publicada. Valencia, España: Universidad Politécnica de Valencia.
- Fischbein E., Tirosh D. y Hess P. (1979) *The Intuition of Infinity. Educacional Estudios in Mathematics* 10, pp. 3-40.
- Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (2003). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de van Hiele*. En L. y. Sánchez, Teoría y práctica en Educación Matemática. Sevilla: Alfar.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). Metodología de la investigación: Roberto Hernández Sampieri, Carlos Fernández Collado y Pilar Baptista Lucio (6a. ed. --.). México D.F.: McGraw-Hill.
- Jurado, F., & Londoño, R. (2005). Diseño de una entrevista socrática para la noción de suma de una serie de términos positivos vía área de figuras planas. Antioquia: Universidad.
- Land, J. (1991). Appropriateness of the van Hiele Model for Describing Students' Cognitive

Processes on Algebra Tasks as Typified by College Students' Learning of Functions. Boston: University of Boston.

Llorens, J. (1997). *Extensión del modelo de van Hiele a un ámbito diferente de la geometría en niveles educativos elementales*. Valencia, España.

Llorens, J. (1995). Extensión del modelo de van Hiele a un ámbito diferente de la geometría en niveles educativos elementales. Valencia, España

Londoño, R Jaramillo C. Esteba, P. (2017) Estudio comparativo entre el modelo de van-Hiele y la teoría de Pirie y Kieren. Dos alternativas para la comprensión de conceptos matemáticos. Revista Logos, Ciencia y Tecnología, Policía Nacional, volumen 9, numero 2.

Rendón y Londoño, (2011). La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren. Universidad de Antioquia. Trabajo de investigación de Maestría. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/2502/1/Rend%C3%B3n2011Comprensi%C3%B3n.pdf>

Sampieri, H., y otros (2012) Metodología de la investigación editorial Mc Graw Hill.

Sandoval, C. (2002). Investigación Cualitativa. Recuperado el 08 de febrero del 2009 de <http://contrasentido.yukei.net/wp-content/uploads/2007/08/modulo4.pdf>

Zapata, s., & Sucerquia, E. (2009). Módulo de aprendizaje para la comprensión de los conceptos de serie de términos positivos. Antioquia: Universidad