La Geometría Fractal (El Aprendizaje de las Nociones Básicas)

Publio Suárez Sotomonte[1]

FRACTAL GEOMETRY
(The learning of the basic notions).

"Si bien el estudio de la geometría fractal corresponde a diferentes ciencias, la geomorfología, la astronomía y la teoría de la turbulencia, entre otras, los objetos naturales en cuestión tienen en común el hecho de poseer una forma sumamente irregular o interrumpida; a fin de estudiarlos, he concebido, puesto a punto y utilizado extensamente una nueva geometría de la naturaleza."
(Mandelbrot, B. 1993)

1 Profesor de la Escuela de Matemáticas de la UPTC. Magíster en Educación - UPN, estudios de doctorado en Didáctica de las Matemáticas y Ciencias Exactas - Universidad de Barcelona.

1. Resumen

En este artículo se presenta el desarrollo de una visión didáctica de la geometría a través de una estructura de trabajo fundamentada en principios de corte cognitivista. En la primera parte se hace un esbozo de los orígenes y desarrollo de la geometría fractal de la naturaleza, tema de esta propuesta didáctica, y se resalta su campo de aplicación. Se introduce una estrategia didáctica para la enseñanza y el aprendizaje a nivel superior (primeros semestres de universidad) de la geometría fractal de la naturaleza, a partir de los sistemas iterados de funciones (IFS's) y de algunos aspectos teóricos de la didáctica de la geometría. En la tercera parte, se presenta una descripción de las actividades experimentadas y los resultados obtenidos en cada una de las etapas de la propuesta didáctica. Se pretende estimular el trabajo de los estudiantes con los sistemas geométricos y el desarrollo del pensamiento espacial en este tipo de geometría. Estas actividades han sido trabajadas por los estudiantes de la asignatura de geometría del programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC). Por último, se describen algunos resultados de trabajos desarrollados en el área de la geometría fractal y se plantean recomendaciones y conclusiones, fruto de la labor de esta investigación.

Palabras clave:

Geometría fractal de la naturaleza, sistemas iterados de funciones (IFS's), representación, estrategia didáctica, aprendizaje.

Abstract:

In this article it is presented the development of a didactical vision of the geometry through a structure of work based in principles of constructivist style. In the first part (Introduction), It is made a sketch of the origins and development of the fractal geometry of the nature, theme of this didactical proposal and it is underlined its field of aplication. It is introduced a didactical strategy for the teaching and the learning to a superior level (first semesters of university) of the fractal geometry of the nature, since the iterated functions systems (IFS's) and of some theorical aspects of the didactic of the geometry. In the third part, it is presented a description of the experimented activities and the results obtained in each one of the stages of the didactical proposal. It is pretended to stimulate the work of the students with the geometrical systems and the development of the space thought in this kind of geometry. Such activities have been worked by the students of geometry of the program of Bachelor in Mathematics in the Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia; finally, are described some results of works developed in the area of fractal geometry and are planned some recommendations and conclusions as a compensation of the labour of this investigation.

Key words: didactics, mathematics education, iterated functions systems (IFS's), the fractal geometry of nature, learning.

2. Introducción

La geometría fractal surge en el ámbito de la matemática como una poderosa herramienta para modelar los fenómenos más impredecibles y fascinantes de la naturaleza. En la década de los años sesenta, Benoit Mandelbrot rescató del olvido, con su trabajo, algunos problemas, planteados a finales del siglo XIX y principios del XX, como fueron: el conjunto ternario de George Cantor, las líneas que "llenan" el espacio de Guiseppe Peano y David Hilbert, la curva "no diferenciable en todos sus puntos" de Helge Von Koch, solución de ecuaciones en Dinámica no Lineal de Poincaré y el concepto de dimensión de Félix Hausdorff, entre otros[2].

El desarrollo de la ciencia informática ha permitido crear nuevos campos sobre la representación de modelos geométricos, a partir de técnicas para el manejo del dibujo en dos y tres dimensiones. Se puede avanzar en el estudio de fractales, gracias a la implementación de procedimientos y algoritmos, formulados de manera más general en la teoría matemática, como por ejemplo, el teorema del collage y el algoritmo conocido como "juego del caos". La finalidad es dibujar aproximadamente (tanto como se desee) los atractores de sistemas dinámicos, que particularizados en la pantalla del ordenador (espacio discreto), generan los distintos ejemplos de la viabilidad al modelar la naturaleza, o al menos, aproximarse a través de la representación de sus modelos.

En este artículo, se presenta una propuesta para el aprendizaje de la geometría fractal, basada en una investigación en el ámbito de la educación matemática; se enfatizan los fractales autosemejantes y su relación con los objetos de naturaleza, en donde subyacen estas estructuras. Para esto se describe una estrategia didáctica, desarrollando de manera gradual, las etapas de exploración de nuestro medio, de visualización, en donde se trabajan diversos sistemas semióticos de representación, de manera especial la representación-modelación en computador, la construcción formal en estructuras algebraicas principalmente y la etapa estudio de aplicaciones. Por último, se describen resultados de trabajos posteriores de los estudiantes, en la teoría de fractales.

3. Referentes teóricos de la geometría fractal y sus aplicaciones

3.1 Surgimiento de los fractales

El termino "fractal", ideado por Mandelbrot, proviene del término latino "fractus" cuyo significado "interrumpido o irregular" describe fielmente, la forma de los objetos que se van a estudiar[3]. Gracias a la introducción de la tecnología informática y de multimedia, el auge de algunas ramas de las matemáticas ha sido palpable en las últimas tres décadas y su desarrollo se ha centrado en la geometría fractal, geometría diferencial, análisis numérico, ecuaciones diferenciales, dinámica no lineal, topología y teoría de la medida. Al replantear y modelar dichos problemas y algoritmos en pantallas de computador de alta resolución, se descubrieron resultados insospechados y encantadores por su forma y colorido; por ejemplo, el

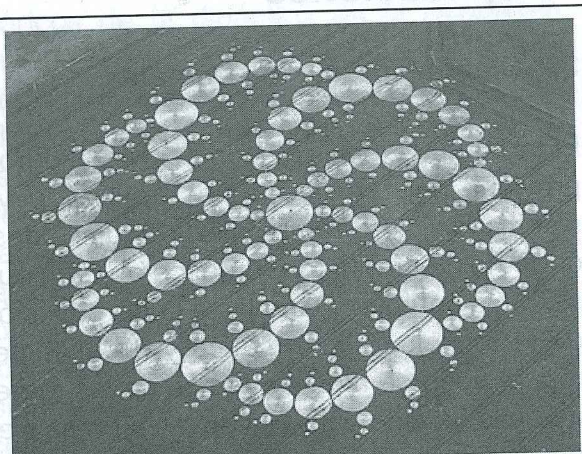
2 GUZMÁN Miguel, y otros. Estructuras fractales y sus aplicaciones. Barcelona: Editorial Labor, 1993.

3 GUZMÁN Miguel, y otros. Estructuras fractales y sus aplicaciones. Barcelona: Editorial Labor, 1993.

"Conjunto de Mandelbrot", el más conocido de los objetos fractales y, probablemente, de los más complicados en su estructura[4]. También es catalogado como el objeto fractal mas extraño y fascinante encontrado hasta el momento en las matemáticas.

La intuición gráfica de la mente del matemático francés Benoit Mandelbrot, le ha permitido proporcionar un lenguaje para describir fenómenos muy variados de gran interés científico y práctico, dejando algunas veces en segundo plano la fundamentación teórica y los aspectos excesivamente formales de esta nueva geometría, cuya aplicación ha enriquecido las herramientas para solucionar problemas en las ciencias naturales y física, geología, astronomía, estadística, economía y ciencias de la computación, entre otras.

Está claro, que los fractales abarcan no solo los campos del caos, sino una amplia variedad de formas naturales, que resultaban imposibles de describir mediante la geometría diferencial hasta ahora desarrollada. Dichas formas son, entre otras, las líneas costeras, los árboles y plantas, las montañas, las galaxias, las nubes y los patrones meteorológicos. Así mismo en anatomía humana, el cerebro, los pulmones , el sistema nervioso, la estructura celular. Otros fenómenos impredecibles, como la turbulencia de los vientos y las aguas, el crecimiento de la población de una especie bajo cierto ambiente, las oscilaciones bursátiles en la bolsa de valores , etc..., escapan al alcance del mundo del orden[5].

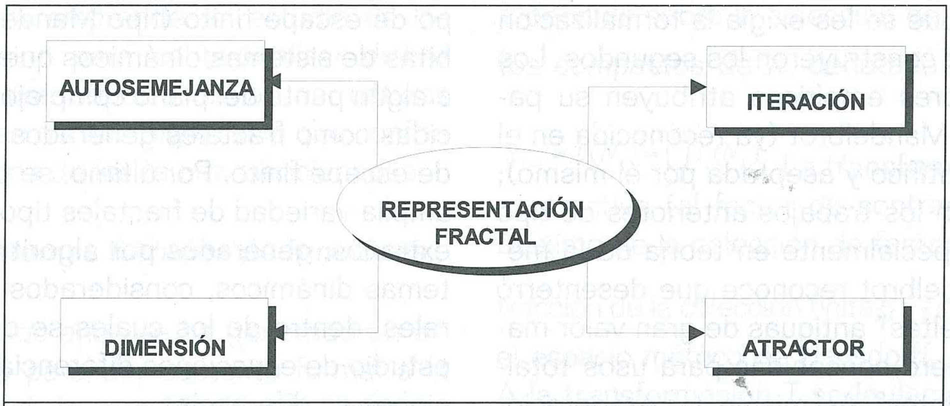
	
Gráfica Nro. 1. El Arte Fractal : Fotografía de dibujos en cultivos	**Gráfica Nro. 2. El Helecho :** Objeto natural dibujado por computador cuya característica de autosemejanza es evidente.

El término fractal introducido para designar las formas irregulares, base del trabajo de Mandelbrot, puede caracterizarse intuitivamente como una figura o modelo cuya forma es sumamente irregular, interrumpida o fragmentada, y sigue siendo así, a cualquier escala

4 PEITGEN, Heinz-Otto y RICHTER, P. H. The beauty of fractals. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

5 BRIGGS, John y PEAT, F. David. Espejo y reflejo, del caos al orden. Barcelona: Gedisa Editorial, 1994.

que se produzca el examen[6]. Como características fundamentales de un fractal, se consideran la autosemejanza o autosimilaridad en su forma, la reiteración o iteración en la formación de su modelo, la dimensión que intenta describir su tamaño o densidad y el concepto de atractor para caracterizar la figura cuando el proceso de iteración tiende a infinito.

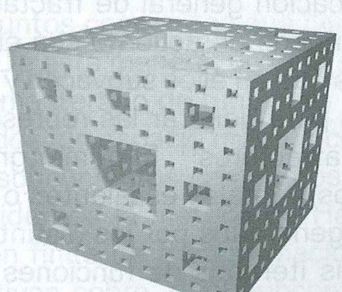


Esquema Nro. 1

Se dice que un objeto de la naturaleza es fractal, cuando un modelo de características fractales lo representa o constituye su modelo ideal. La distinción entre fractal como objeto matemático y como objeto de la naturaleza no se hace evidente, intencionalmente, en los trabajos de Mandelbrot y sus seguidores; únicamente se hace necesaria cuando realiza la generalización y formalización de estos temas. Desde la Topología, los fractales han sido estudiados formalmente por muchos matemáticos teóricos, entre ellos son considerados pioneros, Hutchinson[7] y Barnsley[8]. En estos dos trabajos, los fractales fueron caracterizados como objetos dentro de los subespacios compactos de un espacio métrico completo. Los conjuntos de puntos que forman un fractal se distinguen de los conjuntos tradicionales, comparando la dimensión topológica usual y su dimensión fractal.

Gráfica Nro. 3. Esponja de Mandelbrot.

Se parte de un cubo y se divide en 27 cubitos, en arreglo 3*3*3, de los cuales se toman solo veinte, al quitar el cubo central de cada cara y el cubo del centro. La segunda iteración consiste en aplicar este procedimiento a cada cubito resultante, y así sucesivamente.



6 MANDELBROT, Benoit. The fractal geometry of nature. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.

7 HUTCHINSON, J. E. Fractals and self-similarity. Indiana: Univ. Math. J. 30 713–749, 1981.

8 BARNSLEY, Michael. Fractals everywhere. San Diego: Academic Press INC, 1988.

Desde sus orígenes, ha surgido una polémica, en gran parte superada, que enfrentan los investigadores prácticos y teóricos de la geometría fractal, generada por el excesivo optimismo de los primeros sobre sus alcances, a los que se les exigía la formalización teórica que construyeron los segundos. Los investigadores empíricos atribuyen su paternidad a Mandelbrot (ya reconocida en el ámbito científico y aceptada por él mismo); desconocen los trabajos anteriores de tipo teórico, especialmente en teoría de la medida. Mandelbrot reconoce que desenterró "piezas sueltas" antiguas de gran valor matemático pero concebidas para usos totalmente distintos[9]. Así mismo, las exageraciones sobre las aplicaciones de la geometría fractal han creado escepticismo en algunos matemáticos, ante la falta de fundamentación teórica formal en el desarrollo de tales afirmaciones. A este propósito, Guzmán y otros, manifiestan que en esta polémica no han participado los matemáticos, quienes han realizado y realizan aportaciones fundamentales a la teoría de la geometría fractal[10].

3.2 Los fractales en tiempo de escape

Una clasificación general de fractales puede ser planteada de acuerdo con el tipo de estructuras que en ellos subyacen y que son empleadas para generar las representaciones de los atractores[11]. El primer grupo son los llamados fractales escalantes o autosemejantes, generados por los distintos tipos de sistemas iterados de funciones (IFS's).

9 MANDELBROT, Benoit. The fractal geometry of nature. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.

10 GUZMÁN Miguel, y otros. Estructuras fractales y sus aplicaciones. Barcelona: Editorial Labor, 1993.

11 WEGNER, Tim y TYLER, Bert. El mundo de los fractales, convierta los números en una realidad fractal. Madrid: Ediciones Anaya Multimedia S.A, 1995.

Una segunda gran variedad de fractales, que se denominan fractales en tiempo de escape, nombrados como fractales tipo Mandelbrot y Julia. Los fractales generados por órbitas de sistemas dinámicos en tiempo de escape finito (tipo Mandelbrot) y órbitas de sistemas dinámicos que convergen a algún punto del plano complejo, son conocidas como fractales generados por tiempo de escape finito. Por último, se plantea una amplia variedad de fractales tipo atractores extraños, generados por algoritmos en sistemas dinámicos, considerados más generales, dentro de los cuales se destacan, el estudio de ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias.

Al trabajar con procesos algorítmicos, el papel del análisis numérico es primordial, pues muy difícilmente se puede avanzar en su óptima implementación, sin analizar las implicaciones sobre el uso de métodos recurrentes e iterativos, como la solución aproximada de ecuaciones no lineales. Los métodos iterativos, proveen una excelente oportunidad para estudiar algunos fractales llamados atractores extraños, como los generados mediante las órbitas de sistemas dinámicos, representados apropiadamente en el espacio de fases, como por ejemplo, los fractales tipo bifurcación, cuando al abordar su estudio, no es de interés la convergencia sino la divergencia de ciertas sucesiones.

Michael Barnsley, en su texto Fractals Everywhere, muestra otra alternativa, esta vez desde la topología, al mostrar los fractales como los objetos matemáticos que viven en los espacios de subconjuntos compactos de un espacio métrico completo, en donde se considera la métrica de Hausdorff. El estudio de los sistemas dinámicos dentro de la dinámica no lineal, del concepto de la dimensión en teoría de la medida y el análisis sobre la solución de algunas ecuaciones diferenciales y sistemas de ellas, para comprender la dinámica de algunos fenómenos naturales, se constituyen en alternativas, no solo para emprender el estudio de los fractales, sino para contextualizar dichos conceptos con soporte en las estructuras matemáticas de tipo algebraico que conforman cada una de las ramas mencionadas.

3.3 Los sistemas iterados de funciones

En los últimos años se ha generado un arduo trabajo para dar sustento formal a la teoría fractal, lo que afortunadamente ha tenido éxito. Para abordar el estudio de los fractales existen varios caminos, el emprender la construcción de los conceptos desde la geometría de las transformaciones sustentada en los espacios vectoriales, objeto de estudio del álgebra lineal, hasta llegar a los espacios euclideos y el espacio afín.

Una formalización bien conocida propuesta por Hutchinnson[12] en su trabajo sobre fractales y autosimilaridad, proporciona un sustento matemático a los fractales autosemejantes generados por sistemas iterados de funciones, por sus siglas en inglés (IFS's). Formalmente, consta de una colección finita de afinidades contractivas sobre un espacio métrico completo, junto con su atractor A, simbolizado en (Barnley, 2005) por $W = \{(X,d), \{T_1, T_2, ..., T_n\}, A\}$. Asumiendo un interés didáctico, se amplía la notación de los IFS's, especificando la colección infinita de niveles del fractal, que llamamos nivel cero (N_0), nivel uno (N_1) y así sucesivamente, los cuales son generados recursivamente. Al subconjunto compacto inicial C_0 se le llama "semilla". El nivel k-ésimo, se denotada N_k. Se considera la transformación T definida sobre la colección de subconjuntos compactos de X, denotada $H(X)$ así: $N_{k+1} = T(N_k) = \bigcup_{i=1}^{n} T_i(N_k)$. La transformación *T* es contractiva (el factor de contracción es el máximo de la colección de factores de contracción de la colección finita $\{T_i, i \in F\}$) sobre el espacio métrico de Hausdorff, $(H(X), h)$. A la transformación T se la llama mecanismo de reproducción. Así queda determinada una sucesión de Cauchy de subconjuntos compactos (la compacidad se garantiza por ser *T* contractiva sobre un espacio métrico), denotada $\langle N_i \rangle_{i \geq 0}$, en el espacio métrico $(H(X), h)$. El atractor es la intersección de la colección infinita de niveles del IFS. Esto es, $A = \bigcap_{i=0}^{\infty} N_i$. La convergencia se asegura por ser $(H(X), h)$un espacio métrico completo. El atractor es considerado como el único límite de la sucesión de Cauchy de los subconjuntos compactos que llamamos "niveles". De esta manera, cuando se habla de un sistema iterado de funciones (IFS), quedan fijados, un espacio métrico completo, el de sus subconjuntos compactos, en donde es considerada la métrica de Hausdorff, la colección finita de transformaciones afines contractivas sobre X, el subconjunto compacto inicial (semilla), la transformación afín contractiva *T* sobre $H(X)$, la sucesión de Cauchy de niveles y el único atractor *A*. Esto se denota de manera ampliada:

12 HUTCHINSON, J. E. Fractals and self-similarity. Indiana: Univ. Math. J. 30 713–749, 1981.

$$W = \{(X,d),(H(X),h),\{T_1,T_2,...,T_n\},C_0,T,\langle N_1,N_2,...,N_k,...\rangle,A\}$$

El fractal asociado con el IFS denotado como W, se representa con el atractor. Posteriormente fueron propuestos los sistemas iterados de funciones probabilísticas (PIFS's), en donde a cada transformación afín, se le asocia una probabilidad. Esto es,

$$W_p = \{(X,d),\{T_1,T_2,...,T_n\}\{p_1,p_2,...,p_n\},A\}$$

En donde, para cada i, $0 < p_i < 1$ y $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Las afinidades contractivas permiten estructurar y clasificar los diversos tipos de sistemas iterados de funciones, que subyacen como modelos matemáticos de los fractales autosemejantes. Las clases de sistemas iterados de funciones (IFS), entre ellos los IFS con probabilidades y los IFS recurrentes, se afianzan como temáticas fundamentales para modelar los fractales escalantes.

Una clasificación de sistemas de iterados de funciones[13] ha sido construida en el ámbito teórico, la cual comprende: los sistemas iterados de funciones clásicos (IFS's), los sistemas iterados de funciones con probabilidades (PIFS's), los sistemas iterados de funciones recurrentes (RIFS's), los sistemas iterados de funciones locales (LIFS's), los sistemas iterados de funciones de un solo espacio (ssLIFS's), fractales v-variables y los superfractales[14]. Dicha taxonomía pretende mejorar los modelos matemáticos para representar de manera realista los objetos de la naturaleza.

4. Referentes didácticos

Los enfoques futuristas en educación matemática, han propiciado la inclusión en la formación matemática de nuestros estudiantes, este nuevo tipo de geometría, integrándola con la amplia variedad de tipos de geometría como, las geometrías no euclidianas, y sus diversos modelos hiperbólico y esférico, la geometría proyectiva, la geometría plana absoluta y sintética; en un ámbito más general, la geometría diferencial, la geometría de coordenadas y la teoría de grafos. La dinámica en el desarrollo de la matemática, es tal, que algunos han llegado a afirmar "...la matemática que se aprenderá y enseñará dentro de veinte años, aún no se ha descubierto...". Cuando se habla de la ciencia que prevalecerá en el siglo XXI, según Vasco, C., la geometría fractal y su relación con la teoría del caos, ocupan un lugar preponderante en las propuestas curriculares visionarias[15].

Este trabajo de investigación sobre el aprendizaje de las nociones básicas de la teoría fractal de la naturaleza, adopta dicha directriz. Se pretendió sistematizar algunas experiencias, pues se incorpora la teoría fractal de la naturaleza, al currículo de la educación superior y a las asignaturas de geometría y análisis numérico en la carrera de licenciatura en matemáticas e ingenierías de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), se plantean aspectos prácticos, tecnológicos y formales

13 WADSTRÖMER ,Niclas. Coding of fractal binary images with contractive set mappings composed of affine transformations. Linköping: Linköping University, 2001.

14BARNSLEY Michael, HUTCHINSON John E. and STENFLO Orjan. V -variable fractals and superfractals. Canberra: Australian National University, Department of Mathematics 2003.

15 VASCO, Carlos E. Didáctica de las Matemáticas. Las matemáticas: ¿Arte o ciencia?. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. 2006.

introductorios, específicamente elementos teóricos, conceptos, modelos y estructuras matemáticas necesarias para formalizar la teoría de los fractales, como herramienta para describir y descubrir los secretos de objetos de la naturaleza.

La formación geométrica recibida tradicionalmente, abarca el mundo del orden, de las formas bien formadas, correspondientes a la geometría euclidea y hacen parte del objeto de estudio de la geometría diferencial. Es difícil encontrar estas formas tan regulares en nuestro medio, pues parece ser que los fenómenos de la naturaleza, obedecen con mayor énfasis a leyes caóticas, indeterminadas y propias del azar, más explicables desde la teoría del caos. Las formas se asemejan a lo irregular, a cualquier escala de observación, y a lo infinitamente fragmentado, propio de la relativamente nueva geometría fractal de la naturaleza. El matemático francés Benoit Mandelbrot, precursor de la teoría fractal, conceptúa al respecto: *"[...] Objetos naturales muy diversos, muchos de los cuales no son familiares, tales como la tierra, el cielo y el océano, se estudian con la ayuda de una amplia familia de objetos geométricos que hasta ahora habían sido considerados esotéricos e inutilizables, pero que, por la simplicidad, la diversidad, y la extensión extraordinarias de sus nuevas aplicaciones, merecen ser integrados hasta en la geometría elemental. Si bien su estudio corresponde a diferentes ciencias, la geomorfología, la astronomía y la teoría de la turbulencia, entre otras, los objetos naturales en cuestión tienen en común el hecho de poseer una forma sumamente irregular o interrumpida; a fin de estudiarlos, he concebido, puesto a punto y utilizado extensamente una nueva geometría de la naturaleza."*[16]

Frente a tan precursora invitación, es difícil resistirse, solamente se debe escoger el camino más apropiado para emprender el estudio de tan novedosa geometría. Al iniciar el estudio en el mundo fascinante de la geometría fractal, y debido a los aspectos anteriormente mencionados en su desarrollo histórico, se tienen opciones alternas, según el tipo de formación y el propósito que se tengan al abordarlo. Si el interés es de carácter formal, se puede llegar a los conceptos fractales con el estudio en topología de los espacios métricos. En teoría de la medida se aborda el problema de la dimensión; en dinámica no lineal, las órbitas de los sistemas dinámicos; en análisis numérico, los métodos de solución de ecuaciones no lineales (y sistemas de ellas) en variable real y compleja; en álgebra lineal, el estudio formal de las transformaciones afines, que sirven de soporte para la geometría de las transformaciones. Se complementa con las nociones de programación de computadoras, haciendo especial énfasis en procesos iterativos y recursividad.

Se presentan a continuación los conceptos matemáticos básicos, tanto de educación matemática, como de la didáctica para enseñar y aprender geometría, en donde se contextualiza la propuesta.

4.1 Aspectos de didáctica de la geometría

Siguiendo a Font V.[17], el presente trabajo se enmarca dentro de las tendencias de investigación en educación matemática, con

16 MANDELBROT, Benoit. The fractal geometry of nature. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.

17 FONT Vicenç, Una organización de los programas de investigación en didáctica de las matemáticas. Bogotá: Revista EM, 2002, Vol. 7, Nº 2, 127-170.

referentes teóricos para la naturaleza epistemológica de las matemáticas, las concepciones de aprendizaje y enseñanza, desde las propuestas combinadas del cognitivismo, especialmente la corriente de Ausubel y Novak expuesta en [18] y constructivismo social del conocimiento.

4.1.1 Tendencias en educación geométrica en Colombia

Como referentes teóricos de la propuesta, también se han tenido en cuenta algunos aspectos combinados de las tendencias en educación geométrica, especialmente en Colombia. El aprendizaje de la matemática ha desarrollado a través de los años varios enfoques dependientes, entre otros aspectos, de la concepción epistemológica tanto del docente como del estudiante frente a la naturaleza del conocimiento científico y su relación con el conocimiento cotidiano, y la concepción sobre la naturaleza de la matemática. Por último, se han tenido en cuenta enfoques o tendencias en educación matemática referentes a las formas de aprender y enseñar.

Dos trabajos fundamentales para despertar la reflexión acerca de los temas pedagógicos de la geometría como elementos en la formación integral del individuo, han sido las contribución de Alberto Campos[19]. Abarca desde una revisión histórica de los concepciones epistemológicas de las clases de geometría, el estudio de aspectos teóricos claves, hasta las implicaciones generadas en la educación geométrica en las instituciones universitarias en Colombia.

El otro se plasma en uno de los esfuerzos más relevantes que transformó los fundamentos y estructura de los programas curriculares en el área de matemáticas a nivel básico; fue liderado por Carlos Eduardo Vasco Uribe y un grupo de educadores programadores del Ministerio de Educación Nacional y docentes en ejercicio al servicio del estado. Según Vasco, la "Geometría Activa" se fundamenta en la exploración activa del espacio y sus formas de representación en la imaginación y en el plano del dibujo. Se hace mayor énfasis en el espacio, que en la representación bidimensional y el plano; se fortalece la exploración mediante actividades lúdicas que parten de los movimientos del cuerpo, como los giros, vueltas, desplazamientos y barridos con los brazos. En síntesis, se aboga por rescatar del olvido, a la geometría, pero no para enmarcarla dentro de un enfoque estructuralista y reducirla a un libro de álgebra lineal, sin un solo dibujo, tampoco para describirla dentro del sistema axiomático-deductivo en el ámbito de la lógica como en la euclidiana. Al respecto, en palabras de Vasco, *"[...] la propuesta de la geometría activa invita a estudiar y aprender con los grandes maestros, Tales y Pitágoras, la escuela de Atenas y de Alejandría, con los críticos de Euclides, desde Proclo y Clavius a Hilbert y Bourbaki; y con los geómetras no euclidianos como Sacheri, Lambert, Gauss, Lobatchevsky, Bolyai, Riemann, Beltrani y Poincaré. Pero invita a estudiarla como un ejercicio activo del propio cuerpo, de la imaginación y del dibujo. Y a no perder nunca el aspecto activo y dinámico, para llenar el tablero de más y más figuras muertas y de símbolos estáticos.*

18 NOVAK, Joseph y GOWIN, Bob. Aprender a aprender. Barcelona: Editorial Martínez Roca, 1988.

19 VASCO, Carlos E. Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas. Volumen I y II Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, MEN, 1992.

Eso no sería geometría: sería el cadáver de la geometría."[20].

Los estándares básicos de competencias en matemáticas proponen el desarrollo del pensamiento espacial y la exploración de los sistemas geométricos, como enfoque para el trabajo relativo a lo que tradicionalmente conocemos como geometría. Dicha propuesta curricular se basa en los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación (MEN, 1998) y los programas de Renovación Curricular (MEN, 1984). De especial interés se consideran los procesos de visualización, de justificación y construcción geométrica como encadenamiento natural de los dos procesos precedentes. La incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas, desarrollado por el esfuerzo mancomunado del Ministerio de Educación Nacional y varias universidades estatales, se constituyó, en alguna medida, en dinamizador en la implementación de prácticas novedosas, reflexión en el área y motor de impulso de estos proyectos generados localmente.

4.1.2 Representaciones semióticas y mentales

Uno de los aspectos claves en la propuesta de aprendizaje de la geometría fractal es el papel que juegan las representaciones gráficas en la comprensión y construcción conceptuales. Al respecto Duval manifiesta que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. Un mismo objeto puede darse a través de representaciones muy diferentes. Dicha confusión provoca pérdida de aprendizaje. Las diversas representaciones semióticas de los objetos matemáticos, serían pues secundarias y extrínsecas a la aprehensión conceptual de los objetos.

Para esta propuesta se adopta la tesis de Duval, en la cual las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma. La posibilidad de efectuar transformaciones sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. La utilización de dichos sistemas es primordial en la actividad matemática y parece serle intrínseca.

Tradicionalmente la formación geométrica ha estado centrada, por más de veinte siglos, en la presentación en modelo axiomático de los Elementos de Euclides; los diversos sistemas de representación han estado relegados a la verificación y comprobación de algunas de las propiedades. Respecto a la relación entre representaciones mentales y representaciones semióticas, Duval manifiesta, *"[...] desde el punto de vista genético, las representaciones mentales y las representaciones semióticas no pueden oponerse como dominios totalmente diferentes. El desarrollo de las imágenes mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticos de la misma manera que las imágenes mentales son una interiorización de los preceptos (Vigotski, 1985; Piaget 1968; Denis 1989)."*[21]

Respecto al trabajo con diversos sistemas de representación semiótica, como soporte

20 VASCO, Carlos E. Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas. Volumen 1, Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, MEN, 1992.

21 Duval, Raymond. Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, 1999.

fundamental de las operaciones mentales y la construcción de esquemas mentales, Duval conceptúa, *"[...] la pluralidad de los sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidad cognitivas de los sujetos y por tanto sus representaciones mentales (Benveniste, 1974, Bresson 1987)... Las representaciones mentales nunca pueden considerarse independientemente de las representaciones semióticas."*[22]

Es claro que se debe distinguir entre el concepto y sus distintas formas de representación. Cuando se trabaja en el aprendizaje de los fractales, suele confundirse el fractal con su representación. La noción y la estructura que subyace en este objeto, es el concepto matemático de fractal, sus diversas representaciones son aproximaciones a dicho objeto. Los fractales, desde el punto de vista estricto, sólo existen en la mente, su representación a través de atractores, son simples aproximaciones de dicho concepto.

4.1.3 La representación en educación matemática

Uno de los problemas de investigación en educación matemática, que mayor desarrollo ha tenido en las últimas tres décadas, es el papel de la representación, pues se han tratado de responder preguntas respecto a su naturaleza, sus tipos y el significado que tiene respecto a la construcción de los conceptos matemáticos. Es común en el aprendizaje de las matemáticas, hablar de representaciones externas o internas a nuestra mente, representación mental, imágenes, modelos y esquemas y su papel de intermediarias en la elaboración de los conceptos, o en sentido inverso, como evidencia de la existencia de un concepto o idea, en la representación se evidencian conceptos matemáticos. Al respecto D'Amore, Bruno expresa: *"[...] La imagen suscitada por el hacerse cargo cognitivo de un concepto matemático da una información que toma en cuenta la cultura individual, la experiencia personal y las capacidades generales del individuo (pero también su capacidad específica de construirse imágenes: y esto podría ser objeto de atención del maestro); siendo al menos en primera instancia involuntaria, la imagen mental se forma por simple asociación verbal o icónico, o por otra cosa. A sucesivos estímulos, puede suceder que se tenga discrepancia entre la imagen formada espontáneamente y la solicitación misma; en estos casos se puede tener conflicto cognitivo. Entonces le corresponde al individuo poner en movimiento sus propias habilidades en este campo (en el sentido de Katz) y elaborar la imagen hasta acomodarla a la nueva situación, determinada por el estímulo (por ejemplo del docente). Se llega así a una nueva imagen que podemos llamar sucesiva de la precedente porque es más extensa que la anterior. Este proceso puede repetirse más y más veces, obteniendo así una sucesión de imágenes mentales que acompañan los estímulos producidos alrededor de un concepto"*[23]. Esta concepción de imagen mental evoca una analogía con el proceso de generación de imágenes fractales por niveles, tal vez sea una simple coincidencia; claro está, que en dicha concepción no se asegura que haya una convergencia garan-

22 Duval, Raymond. Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, 1999.

23 D'Amore Bruno. Didáctica de la matemática. Bogota: Cooperativa Editorial Magisterio,2006. pp 165-166.

tizada hacia una imagen mental "mejor elaborada o más extensa", que sirva de símil al atractor.

Desde el enfoque ontosemiótico, Font V, Godino J. y D'Amore B. conceptúan sobre la dificultad de la investigación en el tema de las representaciones: *"[...] En nuestra opinión, la complejidad del tema, la ambigüedad de las representaciones y su importancia están en los objetos matemáticos que se trata de representar, su diversidad y naturaleza. Hablar de representación (significado y comprensión) implica necesariamente hablar del conocimiento matemático, y por tanto, de la actividad matemática, sus "producciones" culturales y cognitivas, así como de las relaciones con el mundo que nos rodea."*[24]

Para este trabajo se adoptan las nociones de representaciones semióticas, definidas por Duval, representaciones mentales, en el sentido de imagen mental definida por D'Amore y algunas concepciones de Font V.[25], sobre el papel de la representación en educación matemática. Se mencionan a continuación supuestos teóricos respecto a la representación que contextualizan el trabajo.

Nos ubicamos en la opción epistemológica "representacionalista", que según Font V.: *"[...] presupone que las personas tienen una mente en la que se producen procesos mentales y que los objetos externos a las personas generan representaciones mentales internas"*.Se distinguen las representaciones internas y externas. Según Font V., conceptua: *"[...] De acuerdo con este punto de vista, las personas tendríamos un conjunto (probablemente infinito) de representaciones mentales que se pueden agrupar en tres tipos: 1) Las que la persona considera externas (las representaciones internas que son el resultado de la codificación de estímulos externos), 2) Las propiamente internas y 3) Las representaciones internas que sirven para realizar representaciones consideradas externas (representaciones internas que se pueden descodificar produciendo respuestas en el medio exterior)"*[26].

Respecto al concepto de fractal, siempre se tendrá presente no confundir el concepto matemático con su representación, de acuerdo a la indicación de Duval, si bien, al estudiar las representaciones no se pueden aislar de su significado.

Intencionalmente, se distinguen los objetos de la naturaleza (que abusando del lenguaje se llaman objetos fractales), sus representaciones, tanto internas como externas, los modelos externos e internos y las estructuras. Una cosa es el concepto de fractal y su representación, y otra, es que los procesos iterativos sirvan para construir representaciones y modelos de la naturaleza.

Los dibujos generados en aplicaciones de geometría dinámica, son considerados como representaciones externas (no osten-

24 FONT, Vicenç, GODINO Juan D. y D'Amore, Bruno. Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. Barcelona: Universidades de Barcelona Granada y Bolonia, 2007.

25 FONT, Vicenç. Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. Barcelona: Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universidad de Barcelona.

26 FONT, Vicenç. Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. Barcelona: Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universidad de Barcelona.

sivas, en el sentido del enfoque ontosemiótico).

Desde el punto de vista matemático formal, no pueden existir representaciones externas totalmente fieles al concepto de fractal. Es por ello que muchos autores han afirmado que los fractales solo se pueden ver con "los ojos de la mente". Las representaciones de pizarras electrónicas, también llamadas dibujos-dinámicos, se representan en espacios discretos. Cuando la resolución de la pantalla es buena, nuestra mente percibe procesos continuos, así realmente no lo sean, problema que ha sido estudiado con el auge de las aplicaciones de matemática simbólica y gráfica. En la literatura de fractales ya se han hecho distinciones entre sistemas iterados de funciones (IFS's) discretos y continuos, y se han estudiado sus implicaciones.

La teoría de los esquemas, como entes que organizan y modelan el conocimiento en distintos niveles de abstracciones[27], se distingue claramente de las definiciones matemáticas. En este trabajo, se usan como instrumentos, los mapas conceptuales, las entrevistas, la observación directa, los cuestionarios abiertos, las representaciones externas (no necesariamente gráficas), para detectar de manera aproximada las complejas estructuras pre y pos conceptuales, organizadas a través de esquemas mentales (que son construcciones individuales, pero que han sido incididos colectiva, institucional y culturalmente).

Las representaciones gráficas son extensamente trabajadas, pero no se considera que puedan constituirse en obstáculo para la posterior formalización matemática de la teoría fractal.

4.1.4 La geometría dinámica

La amplia divulgación que han tenido aplicaciones de geometría dinámica como Cabri Geometry II, Cabri3D, Sketchpad, Regla y Compás, Calques, NonEuclid, Fz-plot, además de los ya mencionados programas de matemática simbólica y los especializados para dibujar y modelar fractales, nos hace pensar que aprender matemáticas, al menos en los primeros niveles de la universidad, sin el uso de estos recursos informáticos, sería privarse de vivir experiencias fascinantes y novedosas en el campo de las representaciones de conceptos matemáticos. Por supuesto que cuando se usa el ordenador como mediador del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, cambian las concepciones tradicionales del profesor y estudiante frente a sus prácticas educativas. Sobre este tema Moreno conceptúa: *"[...] Las herramientas computacionales, modifican la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático... Algunos autores se han interesado por la génesis instrumental de las herramientas computacionales (Rabardel, 1995)"*[28]. Al aceptar la mediación de la pizarra electrónica, de los ordenadores y computadoras, no se trata de trabajar con las mismas prácticas educativas tradicionales. Se deben modificar las situaciones problemáticas, los problemas, las tareas, las representaciones y hasta la forma de indagar e investigar sobre el conocimiento matemá-

27 D'Amore Bruno. Didáctica de la matemática. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 2006. pp. 194-195.

28 MORENO, Armella Luis. Argumentación y formalización mediadas por Cabri-Geometry. Bogotá: Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional, 2002. pp. 46-47

tico. Al respecto de los principios con que fue elaborado el programa Cabri Geometry, Collette Laborde manifiesta *"[...] El programa ha sido elaborado con la idea que el paso por las primitivas geométricas debería favorecer el uso de conocimientos geométricos...El entorno, responde pues, a la intención de ofrecer un sistema de significantes que tenga un dominio mayor de funcionamiento, en relación con la geometría y que haga más evidentes los límites del dominio de interpretación"*. En cuanto al ambiente de geometría dinámica generado por el programa Cabri Geometry, considero que la distinción inicial entre primitivas geométricas y de construcción es de gran importancia. Poder hacer y grabar macro-construcciones (que posteriormente pueden convertirse en primitivas de construcciones más elaboradas) constituye un elemento fundamental que le proporciona flexibilidad y la capacidad de hacer dibujos-dinámicos cada vez más complejos, que se escapan a la intencionalidad inicial, al crear el programa, es uno de los mayores potenciales en la exploración de las representaciones en el campo de las matemáticas. Para dibujar las representaciones aproximadas de los atractores de los fractales, las macros juegan un papel clave, tanto para la síntesis de los procesos, como en la generación de los algoritmos que subyacen en los sistemas iterados de funciones. Frente a las opciones que se pueden plantear en geometría dinámica, Collette Laborde afirma: *"[...] se pueden plantear situaciones "robustas" y situaciones "blandas". Las primeras provienen de la construcción de una figura que satisface condiciones geométricas. Las construcciones robustas requieren conocimientos que los alumnos no tienen y se caracterizan por los teoremas y propiedades al estilo tradicional. Las construcciones blandas son aún más importantes para ayudar a obtener las construcciones robustas. Son construcciones de una figura que no satisface todas las condiciones"*[29]

En este sentido, en el Cabri Geometry, se trabajan de manera natural las construcciones de la geometría euclidea. Para crear los dibujos-dinámicos correspondientes a los fractales autosemejantes, el estudiante se debe enfrentar a muchas situaciones "blandas", que por sus características brindan un espacio más apropiado para el aprendizaje por descubrimiento. Las situaciones problemáticas que el estudiante debe enfrentar en la construcción del modelo fractal, permite enfocar la actividad, a propiciar el desarrollo del pensamiento espacial, sin enfatizar en el bagaje de conocimientos, teoremas y propiedades, al estilo de la geometría clásica. Estas situaciones abiertas, son más flexibles, no tienen soluciones únicas y permiten desarrollar las competencias relativas a la solución de problemas geométricos. El soporte que dichas actividades prestan, robustece la capacidad de los estudiantes, cuando deben enfrentar problemas más formales, cuya solución implica la aplicación de los teoremas clásicos de la geometría. En el momento de poner a prueba la imaginación y creatividad de los estudiantes, en el diseño de sus propios modelos fractales, surgen construcciones difíciles de lograr, que implican el uso de resultados que no conocen y que los impulsan a investigar y solucionar los problemas, que surgen de dichas situaciones abiertas. El desplazamiento es un concepto fundamental que determina si las construcciones permanecen invariantes, con dichos cambios. El uso de paráme-

29 **LABORDE Colette. Soft and hard constructions with Cabri : contribution to the learning of mathematics. Bogotá: XVII Encuentro de Geometría, Universidad Pedagógica Nacional, 2006.**

tros en las primitivas de dibujo y primitivas geométricas (transformaciones) permiten crear un campo de exploración para descubrir nuevos resultados y encontrar soluciones alternas a los problemas surgidos en el proceso.

4.2 Aprendizaje de la geometría fractal

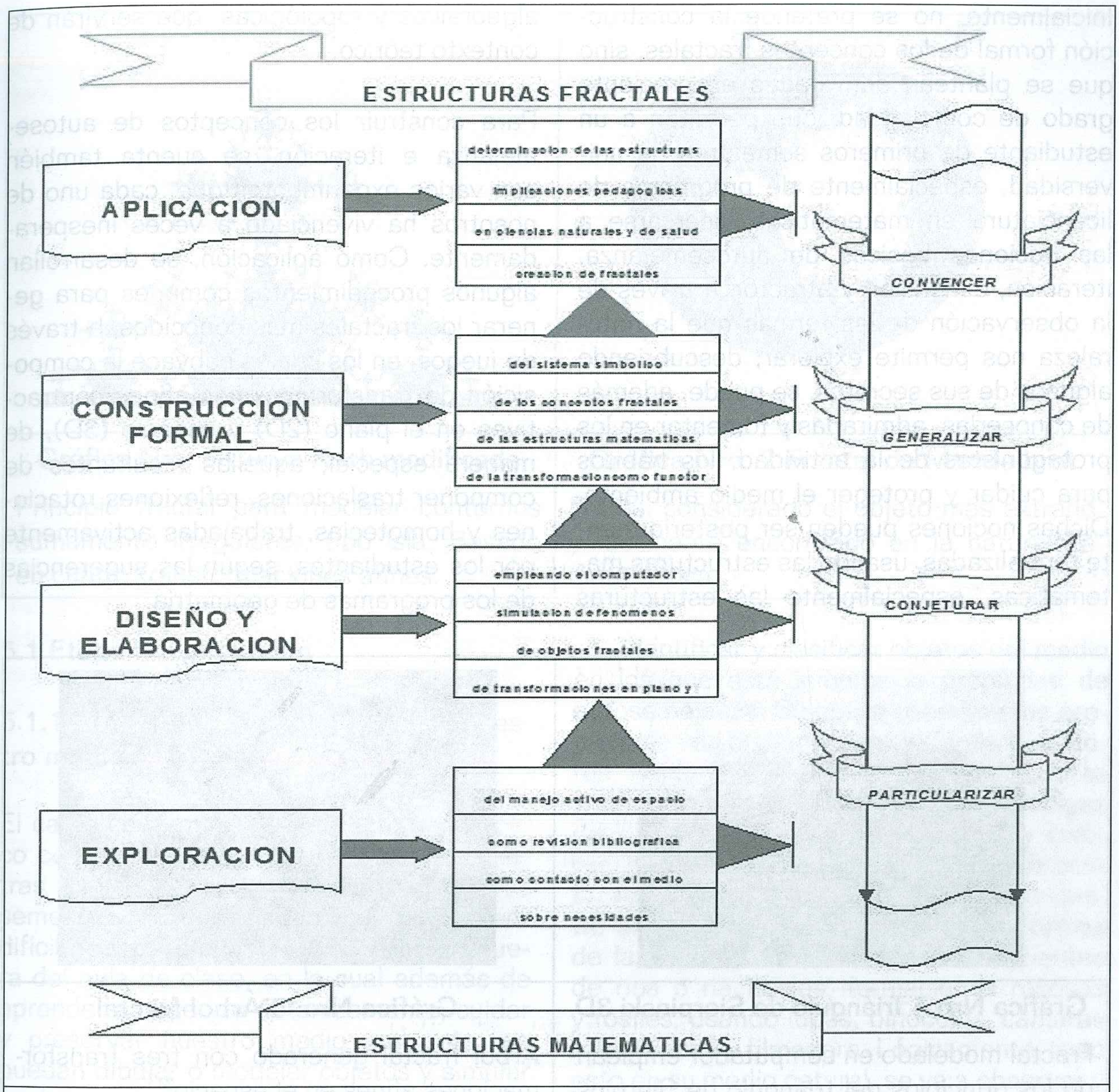
Se proponen en este trabajo las siguientes cuatro etapas, (correspondientes a un esquema clásico) para el aprendizaje de la geometría fractal:

Exploración: como actividad de identificación y clasificación de objetos y fenómenos con características fractales subyacentes. En cualquier actividad de aprendizaje de la geometría, las prácticas para conocer las regiones naturales de nuestro entorno, casi nunca se realizan, o son escasas. Al analizar los fenómenos y objetos del ecosistema, surgen diversas opciones para clasificar los objetos fractales susceptibles de ser posteriormente modelizados.

Representación-modelación: como espacio para conocer y dibujar los fractales más famosos, detectar sus características y propiedades, y también para que los estudiantes creen sus propios fractales en computador. Los fractales no solo se pueden representar de manera aproximada usando el ordenador. El rescate del dibujo en lápiz y papel, como expresión artística, es importante para representar algunos fractales, por ejemplo las curvas que llenan el espacio, fractal de Sierpinski, curva de Koch, entre otros.

Construcción Formal de los conceptos fractales claves, soportados en las estructuras algebraicas de espacio vectorial, espacio euclideo y espacio afin. También es abordado el estudio topológico de los fractales, desde los espacios métricos completos.

Aplicaciones de los conceptos fractales en la solución de diversos problemas de la vida cotidiana. Se abordan primordialmente las aplicaciones de la geometría fractal de la naturaleza, en áreas como la visualización y modelización de ecosistemas de plantas, la modelación de terrenos, la representación tridimensional (3D) de objetos, la relación entre arte y geometría y los fractales y el cuerpo humano. La gran cantidad de aplicaciones que tienen los fractales hace imposible hacer un recorrido por la mayoría de ellas. El propósito de esta etapa es profundizar en algunas pocas aplicaciones y detectar el papel de los fractales, en la solución de problemas, tanto dentro de la matemática, como en problemas generados fuera de su ámbito.



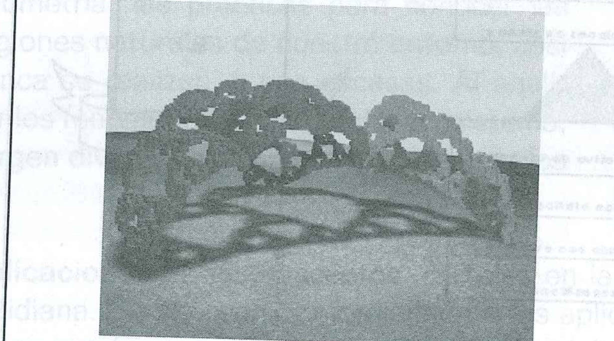
Esquema Nro. 2 Descripción de las etapas

5. Implementación de la propuesta didáctica

A continuación se describen las actividades desarrolladas, organizadas en las etapas propuestas en la estrategia didáctica. Estas pretenden propiciar ambientes de aprendizaje apropiados para construir las nociones básicas de la geometría fractal de la naturaleza, empleando recursos del medio y la incorporación de las nuevas tecnologías de la información y comunicación (TIC's), al aprendizaje de la geometría. Se usa el computador, tanto como herramienta de trabajo, implementando las aplicaciones para dibujar y modelar fractales, así como medio de aprendizaje de las características, propiedades, sistemas y estructuras relativos a los fractales.

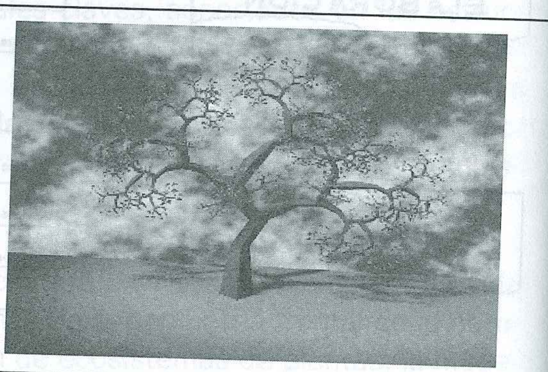
Inicialmente, no se pretende la construcción formal de los conceptos fractales, sino que se plantean actividades en creciente grado de complejidad, que permitan a un estudiante de primeros semestres de universidad, especialmente de programas de licenciatura en matemáticas, acercarse a las nociones básicas de autosemejanza, iteración, dimensión y atractor, a través de la observación de las formas que la naturaleza nos permite explorar; descubriendo algunos de sus secretos, se puede, además de conocerlas, admirarlas y fomentar en los protagonistas de la actividad, los hábitos para cuidar y proteger el medio ambiente. Dichas nociones pueden ser posteriormente formalizadas, usando las estructuras matemáticas, especialmente las estructuras algebraicas y topológicas, que servirán de contexto teórico.

Para construir los conceptos de autosemejanza e iteración, se cuenta también con varios experimentos que, cada uno de nosotros ha vivenciado a veces inesperadamente. Como aplicación, se desarrollan algunos procedimientos comunes para generar los fractales más conocidos, a través de juegos, en los cuales subyace la composición de transformaciones afines contractivas en el plano (2D) y espacio (3D), de manera especial, aquellas resultantes de componer traslaciones, reflexiones rotaciones y homotecias, trabajadas activamente por los estudiantes, según las sugerencias de los programas de geometría.



Gráfica Nro.4 Triángulo de Sierpinski 3D

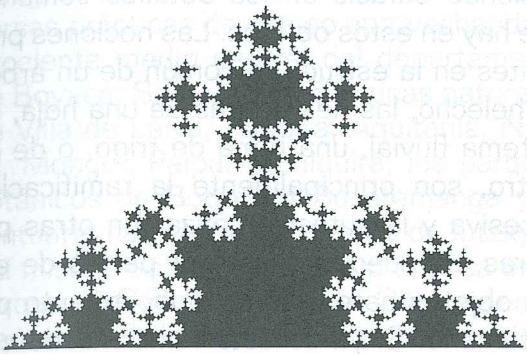
Fractal modelado en computador empleando los principios del triángulo de Sierpinski.[30]



Gráfica Nro. 5 Árbol fractal

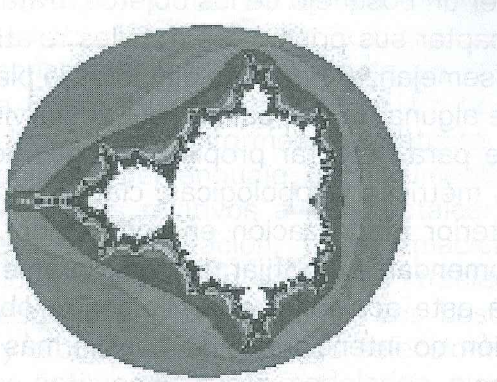
Árbol fractal generado con tres transformaciones afines en el espacio[31].

30 OLIVER, Dick y otros. Fractals graphics for windows. Indianapolis: SAMS Publishing, 1994.
31 Fractales tomados de la aplicación Fractal Vision de OLIVER, Dick y otros.



Gráfica Nro. 6 Curva Koch modificada

Principio fractal para modelar contornos sumamente irregulares, tipo isla. Basado en cuatro transformaciones afines.



Gráfica Nro. 7 Fractal de Mandelbrot

Fractal considerado el objeto más extraño y fascinante encontrado en la naturaleza matemática.

5.1 Etapa I. Exploración

5.1.1 Actividad E-I. Exploración de nuestro medio

El carácter formalista, abstracto y simbólico con el cual se inician algunas de nuestras clases de matemáticas en primeros semestres de universidad, nos hace creer difícil, realizar una actividad de campo, fuera del aula de clase, en la cual además de aprender a observar detenidamente, cuidar y preservar nuestro medio ambiente, se puedan dibujar o modelar objetos y simular fenómenos, que desentrañen los secretos matemáticos que tiene la naturaleza. Los ecosistemas constituyen un entorno natural para el desarrollo de la actividad humana, en el cual, obviamente, están presentes los procesos matemáticos; solo hay que adoptar enfoques adecuados para detectar los modelos. No se debe olvidar, que muchos de los conocimientos que hoy tenemos del mundo se empezaron a conocer de esta manera.

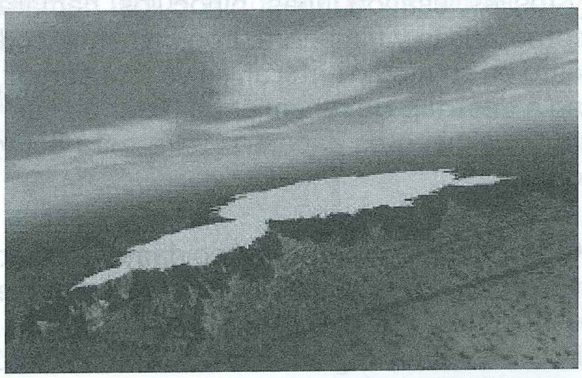
Se pretende con la primera actividad, mediante la exploración de algún parque natural, identificar y clasificar objetos del medio en los que está inmersa la propiedad de autosemejanza. Se busca descubrir las propiedades de distintas clases de plantas, flores, hojas (como los helechos de distintos tipos), árboles grandes y pequeños, espigas de trigo, hojas de distintas formas y colores, hortalizas (como un coliflor o un brócoli). Además de admirar el paisaje de nuestro entorno, se deben observar las formas de las nubes, de las montañas, vertientes de ríos o riachuelos, formaciones rocosas y fósiles, usando lupas, binóculos, cámaras fotográficas y filmadora. Lógicamente, todo esto en su medio natural, se va a observar y no a destruir. Se recomienda tener en cuenta los siguientes aspectos para esta actividad:

Observar los objetos detenidamente, anotando sus características, partes y detalles especiales. Por ejemplo, al observar un árbol, se deben registrar datos como: el número de ramas que tiene el tronco principal y a la vez el número de subramas que cada una de ellas tiene y así sucesivamente.

Hacer un bosquejo de los objetos, tratando de captar sus principales detalles relativos a la semejanza. Hacer un dibujo de la planta o de alguna de sus partes, puede servir de base para detectar propiedades geométricas, métricas y topológicas, claves para la posterior modelización en computador. Es recomendable no fijar tantos parámetros para esta actividad; a veces con la observación no intencionada se captan más detalles.

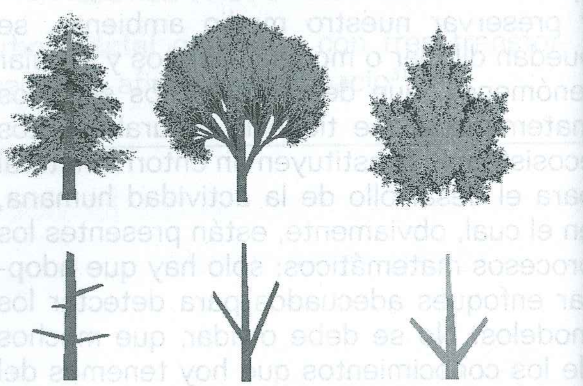
Es conveniente hacer una sesión plenaria en donde los estudiantes expongan, analicen y discutan los resultados de la práctica de campo, con base en el material y datos recopilados, las fotografías y filmaciones hechas. Adicionalmente, se considera provechoso presentar los resultados de la exploración bibliográfica hecha sobre los libros de fractales presentados en la bibliografía y páginas WEB sobre fractales seleccionadas de Internet, pues muchos de estos ejemplos clásicos, son evidencia inmediata de la propiedad de autosemejanza.

La actividad orientadora del docente, permite sintetizar y detallar los aspectos claves de la autosemejanza, tratando de unificar el lenguaje empleado por los estudiantes y haciendo énfasis en los detalles comunes que hay en estos objetos. Las nociones presentes en la estructura común de un árbol, un helecho, las nervaduras de una hoja, un sistema fluvial, una rama de trigo, o de cilantro, son principalmente la ramificación sucesiva y la autosemejanza. En otras palabras, se pueden encontrar partes de estos objetos parecidas al todo, excepto por el tamaño. Si ya se está familiarizado con las transformaciones, se puede detectar una especie de homotecia en este proceso. Es importante que el docente seleccione los objetos encontrados por los estudiantes, de los cuales algunas partes se parecen al todo, es decir, en donde la autosimilaridad es una propiedad inherente al objeto. Como actividad final de esta parte, se les pueden proporcionar los dibujos de los siguientes modelos fractales (Gráficas 8 Y 9) y fotografías de objetos, para confrontar con sus representaciones y concluir sobre los aspectos comunes. Si se dispone de los recursos informáticos, se puede enriquecer el trabajo con objetos dibujados en aplicaciones como Xfrog.



Gráfica Nro. 8 Paisaje Fractal

Árboles de distintos tipos, nubes, montaña basada en el conjunto de Mandelbrot.

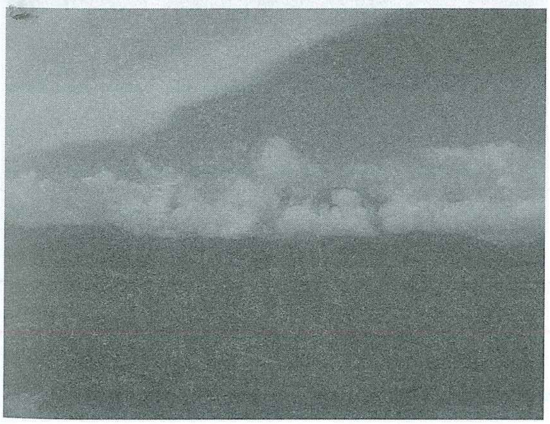


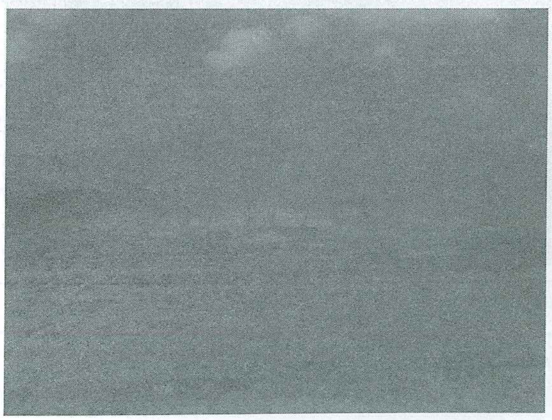
Gráfica Nro. 9 Semilla y atractor

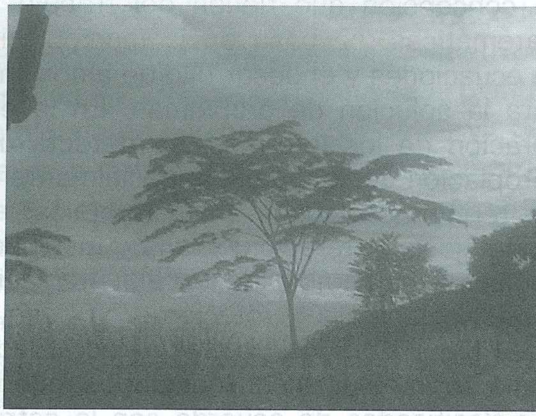
Diferentes representaciones de árboles

En el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, se han realizado diversas prácticas de campo aprovechando el excelente medio natural del departamento de Boyacá. Se han visitado zonas naturales de Villa de Leiva, Ráquira, Aquitania, Nobsa, Monguí, Paipa, Moniquirá; los parques botánicos de Bogotá y Bucaramanga y el santuario natural de San Pedro de Iguaque. Así mismo, se han realizado prácticas en el parque el Gallineral de San Gil. Los estudiantes también han visitado diversos sitios con jardines especializados y viveros de la ciudad.

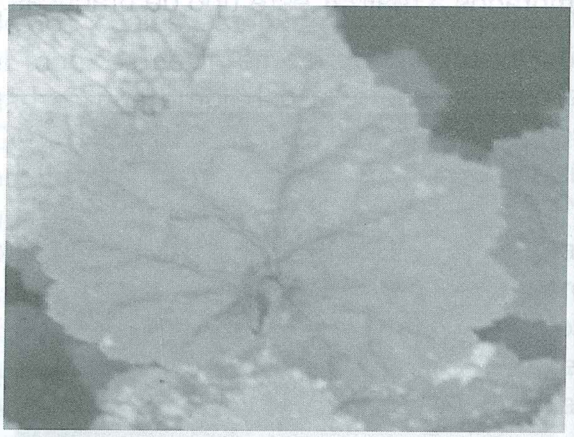
Algunos de los estudiantes no están acostumbrados a realizar este tipo de prácticas. La concepción que tienen del trabajo en matemáticas, se basa en la manipulación de ecuaciones y el desarrollo de algoritmos para la solución de problemas. En la elaboración de los informes, se detecta una apropiación del lenguaje, especialmente de los términos relativos a los fractales: autosemejanza, iteración, transformaciones, homotecia o cambio de escala, traslación o desplazamiento y rotación. Los bosquejos y dibujos de los objetos seleccionados como óptimos para ser modelados, pueden ser clasificados de acuerdo con la estructura que muestran. Posteriormente, pueden ser modelados en diversas aplicaciones de computador. Las siguientes gráficas, son una muestra de las evidencias fílmicas y fotográficas que hacen parte del material recopilado durante las prácticas de campo.

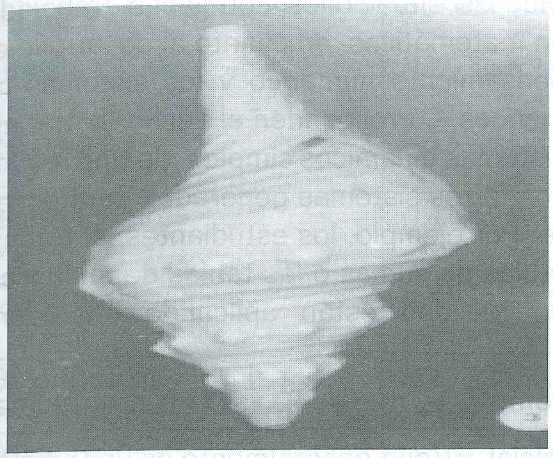
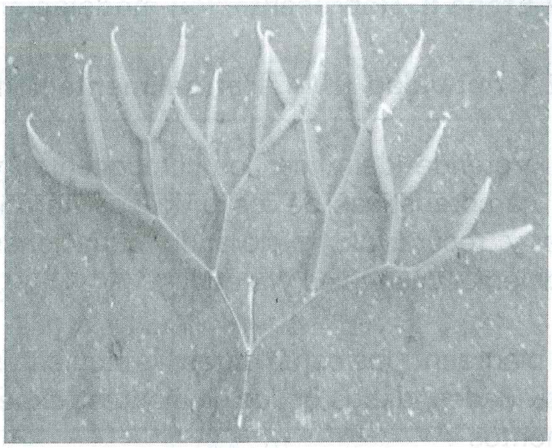






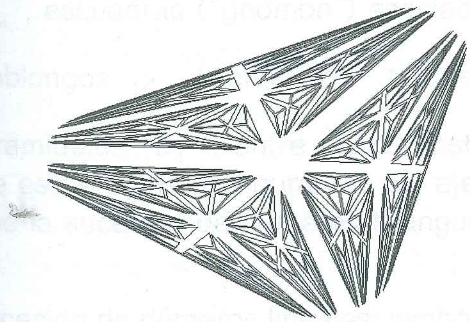
Fotografías Nro. 1 Etapa de exploración



Fotografías Nro. 2 Objetos naturales con estructura fractal subyacente

En los fractales que representan objetos de la naturaleza, las homotecias o cambios de escala, especialmente las aplicaciones contractivas (es decir, el factor de reducción varía entre cero y uno) juegan un papel primordial en su generación y en la representación del atractor. Este concepto se ha utilizado para caracterizar y formular algunas nociones matemáticas claves. Al respecto Guzmán, M., manifiesta: *"[…] La Geometría fractal ofrece un modelo alternativo, que busca una regularidad en las relaciones entre un objeto y sus partes a diferentes escalas. Esta forma de regularidad no precisa el encorsetamiento del objeto en otras formas geométricas que, aunque elementales, no dejan de ser externas al mismo; por el contrario buscan la lógica interna del propio objeto, mediante relaciones intrínsecas entre sus elementos constitutivos, cuando estos se examinan a diferentes escalas. De esta forma no se pierden la perspectiva ni del objeto global ni del aspecto del mismo en cada escala de observación… La geometría Fractal busca y estudia los aspectos geométricos invariantes por homotecias"*[32]



Gráfica Nro. 10 Fractal tipo ramificación

La semilla una Y, tres transformaciones conforman su mecanismo de reproducción.

La figura representa el atractor, cuando el proceso iterativo tiende a infinito.

32 GUZMÁN Miguel, y otros. Estructuras fractales y sus aplicaciones. Barcelona: Editorial Labor, 1993. pp. 5

5.2 Etapa II. Representación-modelación

5.2.1 Actividad RM-I. Retroalimentación

Se pretende identificar los componentes y las características de los procesos iterativos y recursivos, explorando situaciones problemáticas reales y teóricas.

Se plantean a los estudiantes las siguientes actividades, dados en los siguientes "experimentos".

Esta situación la hemos vivenciado algunas veces, cuando vamos a la peluquería: un estudiante del grupo se ubica en medio de los dos espejos. Otros dos estudiantes, colocan los espejos en disposición paralela. Se varía ligeramente el ángulo en uno de ellos, hasta que dicho estudiante observe una sucesión de imágenes. ¿Cuál es la explicación de este fenómeno?

¿Cuál es la causa del ruido ensordecedor, al acercar el micrófono al parlante de la misma grabadora, a la cual está conectado? Experimentar con diversas distancias.

¿Qué efecto se produce, cuando se enfoca una cámara filmadora, a un televisor al cual está conectada? ¿La distancia determina la imagen así obtenida? ¿Por qué?

El conocido deseo pedido a un Rey, consistía en que, partiendo de un grano de trigo, por cada nuevo cuadro de un tablero de ajedrez, se obtendría el doble del anterior. Al final, se debería recompensar con la suma de los granos obtenidos por cada uno de los sesenta y cuatro cuadros. ¿Cree Usted que el Rey pudo conceder tal deseo? ¿Por qué?

Muchas situaciones cotidianas trabajadas en matemáticas, en cuanto al desarrollo del pensamiento numérico y los sistemas numéricos, corresponden al hecho de trabajar sistemas dinámicos simples, de tipo recursivo y otros sistemas generados iteradamente. Por ejemplo, los estudiantes, al trabajar tablas de sumas o las tablas de multiplicar, en realidad están aplicando operadores

como $(\ )+1$, $2*(\ )$, $\frac{1}{2}*(\ )$, a un número inicial x_0 (que generalmente es uno). Es decir, manipulan intuitivamente las sucesiones y series, obtenidas de aplicar un operador de manera iterativa. La mayoría de las veces, es necesario evidenciar la estructura que subyace en estos procesos iterativos, es decir, que el estudiante sea conciente de este proceso de generar dichas secuencias. El cálculo de los primeros términos de una sucesión y de una serie, son aspectos claves para apropiarse del concepto de proceso iterativo. Los números pitagóricos nos proporcionan un ejemplo digno de explorar. En principio, se pueden hacer las listas de los primeros términos de las sucesiones de números pitagóricos. [33]

33 CASABUENAS, Cecilia, CASTIBLANCO Celia y LEÓN, Teresa. Los números pitagóricos. Documento de trabajo. Bogotá: MEN, 1985.

Números Pitagóricos	Sucesión	Término general
Lineales	$\langle 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,...\rangle$	$\langle n\rangle_{n\geq 1} = \langle L_n\rangle$
Escuadra	$\langle 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19...\rangle$	$\langle 2n-1\rangle_{n\geq 1} = \langle E_n\rangle$
Rectangulares	$\langle 1,4,6,8,9,10,12,14,15,16....\rangle$	$\langle n.m\rangle_{n\geq 2, m\geq 2} = \langle R_{n,m}\rangle$
Cuadrados	$\langle 1,4,9,16,25,36,49,64,...\rangle$	$\langle n^2\rangle_{n\geq 1} = \langle C_n\rangle$
Oblongos	$\langle 2,6,12,20,30,42,56,72,...\rangle$	$\langle n(n+1)\rangle_{n\geq 1} = \langle O_n\rangle$
Triangulares	$\langle 1,3,6,10,15,21,28,36,...\rangle$	$\left\langle \frac{n(n+1)}{2}\right\rangle_{n\geq 1} = \langle T_n\rangle$
Pentagonales	$\langle 1,5,12,22,35,...\rangle$	
Hexagonales	$\langle 1,6,15,28,45,...\rangle$	
Tetraédricos	$\langle 1,4,10,20,35,56,...\rangle$	$\langle D_{3_n}\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} T_i\right\rangle$
Piramidales	$\langle 1,5,14,30,55,91,..\rangle$	$\langle D_{4_n}\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} C_i\right\rangle$

Luego se hallan las formas o términos generales de las sucesiones de los números lineales $\langle L_n\rangle$, escuadras ("gnomon") asociados a los impares, rectangulares $\langle R_n\rangle$, cuadrados $\langle C_n\rangle$, oblongos $\langle O_n\rangle$, triangulares $\langle T_n\rangle$, pentagonales $\langle P_n\rangle$, hexagonales $\langle H_n\rangle$, tetraédricos $\langle D_{3_n}\rangle$ piramidales $\langle D_{4_n}\rangle$, entre otros. Posteriormente, se pueden establecer las relaciones entre estos números figurados. Un ejemplo de las relaciones que se pueden establecer, es que la sucesión de números triangulares es la sucesión de sumas parciales (serie), de la sucesión de números lineales; simbólicamente, $T_n = \sum_{i=1}^{n} L_i$, con lo cual se deducen sumatorias de la forma $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Otra propiedad que se puede deducir, es que todo número cuadrado se puede expresar como la suma de primeros impares consecutivos; en símbolos, $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$. Así mismo se pueden deducir algunas expresiones matemáticas como, productos notables, del tipo $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, al relacionar los números cuadrados y los números rectangulares. También se pueden obtener otras relaciones expresadas en sumatorias, cuando se trabajan las sucesiones mencionadas y las sucesiones de sus sumas parciales. Este ejemplo nos puede servir para mostrar las diferencias entre sucesiones generadas recursivamente y las generadas de manera iterada. Si se considera la sucesión de números de Fibonnaci, se ilustra la diferencia, esta sucesión se puede expresar como:

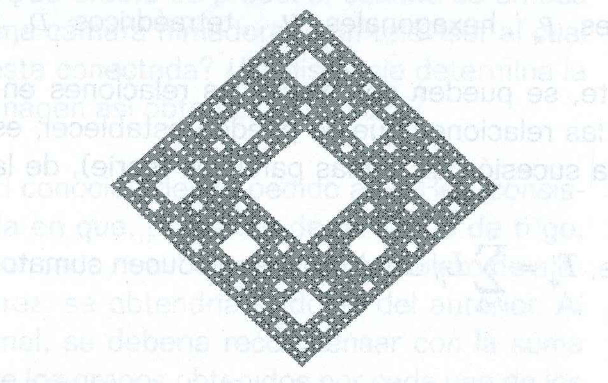
$$S = \langle s_0 = 1, s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = 3, s_4 = 5, \ldots, s_{k+2} = s_{k+1} + s_k, \ldots \rangle$$

Una diferencia, radica en el hecho que para generar un término de la sucesión de Fibonnaci, es necesario conocer los dos términos precedentes de la sucesión. En las generadas iteradamente, el término general, permite hallar directamente, cualquier elemento de la sucesión, en función de su k-ésimo lugar. El cálculo de sucesiones y series es de gran importancia para caracterizar algunas propiedades de los fractales autosemejantes, especialmente para calcular su dimensión y determinar su longitud, área o volumen.

Una vez analizadas, en reuniones plenarias, algunas de estas actividades, los estudiantes detectan una estructura común subyacente que nos introduce en el concepto de retroalimentación. En matemáticas y programación de computadores, a este procedimiento de generación de una sucesión se lo conoce como proceso iterativo, base para la lógica recursiva. Sus elementos principales, se resumen en el operador iterador:

$$S = \langle s_0, \ldots s_{k+1} = f(s_k) \ldots \rangle_{k \geq 0}$$

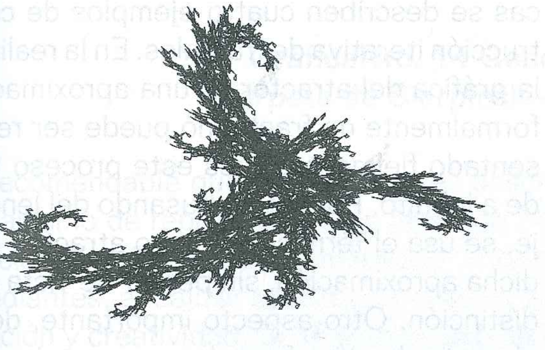
En la siguiente gráfica, se sintetizan las instrucciones que conforman el algoritmo para generar una variación del fractal de Sierpinski, en donde se ejemplifica la recursividad como proceso fundamental.



Gráfica Nro. 12 Carpeta de Sierpinski
Fractal generado a partir de un cuadrado y ocho transformaciones. Intuitivamente se puede describir el mecanismo de reproducción, como el proceso de determinar una cuadrícula 3X3 y quitar el cuadrado del centro. A los ocho cuadrados resultantes se les aplica el mismo mecanismo, y así sucesivamente. La figura está en cuarto nivel y es una aproximación al fractal.

La recursividad es, algunas veces, un proceso inherente a los algoritmos implementados en computador, que permiten simplificar la estructura de objetos o procesos de funcionamiento de estos, en modelos sencillos, con muy poca información. Un campo de la matemática que emplea la recursividad, es el Análisis Numérico; sus algoritmos describen y contienen procesos iterativos que permiten obtener soluciones aproximadas a determinados problemas de tipo numérico. Cuando un método no permite encontrar soluciones, generalmente se encuentra con procesos aleatorios y caóticos. Un sencillo análisis de estos casos, proporciona ejemplos del surgimiento de orden en procesos de naturaleza caótica, como se mostrará en una actividad posterior.

La retroalimentación tiene diversas aplicaciones y son incontables las manifestaciones de la naturaleza que la evidencian. Sobre el tema de retroalimentación, Briggs, J. y otros conceptúan: *"[...] Hablar de retroalimentación 'negativa' y 'positiva' no implica un juicio de valor. Los nombres solo indican que un tipo de realimentación regula y el otro amplifica. Ahora se reconoce que las dos clases básicas de retroalimentación están en todas partes, en todos los niveles de los sistemas vivientes, en la evolución de la ecología, en la psicología inmediata de nuestra interacción social y en los términos matemáticos de los métodos de solución aproximada de ecuaciones no lineales. La iteración y la no linealidad, encarnan una tensión esencial entre el orden y el caos."* [34]



Gráfica Nro. 13 Ejemplo de atractor extraño

En procesos aparentemente determinísticos, de pronto, surge el caos incontrolable e impredecible. Pero hay también procesos aparentemente aleatorios en donde subyace el orden. Esta armonía entre Caos y orden también ejerce una fascinación que siempre ha cautivado a la humanidad.

5.2.2 Actividad RM-II. Hacia el concepto de atractor

Para introducir los fractales desde un enfoque intuitivo, es necesario diseñar e implementar estrategias para comprender la composición de transformaciones afines en el plano y espacio, aspecto fundamental para construir el concepto de sistema iterado de funciones (contractivas, cuyo factor de contracción k, cumple que $0 < k < 1$), cuyo modelo converge a un atractor.

En la formación geométrica establecida para educación básica y media, se hace especial énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, inicialmente con la exploración del espacio tridimensional (3D) y posteriormente en el plano (2D), a través del manejo activo de las transformaciones aplicadas a las figuras. Se supone que un estudiante universitario,

34 BRIGGS, John y PEAT, F. David. Espejo y reflejo, del caos al orden. Barcelona: Gedisa Editorial, 1994, pp 26.

está familiarizado con las operaciones de traslación, rotación, reflexión y homotecia, para emprender el manejo activo de figuras fractales, en las cuales, por medio de composición de dichas transformaciones afines contractivas y los procesos iterativos, logre apropiarse de estos conceptos, aparentemente complejos.

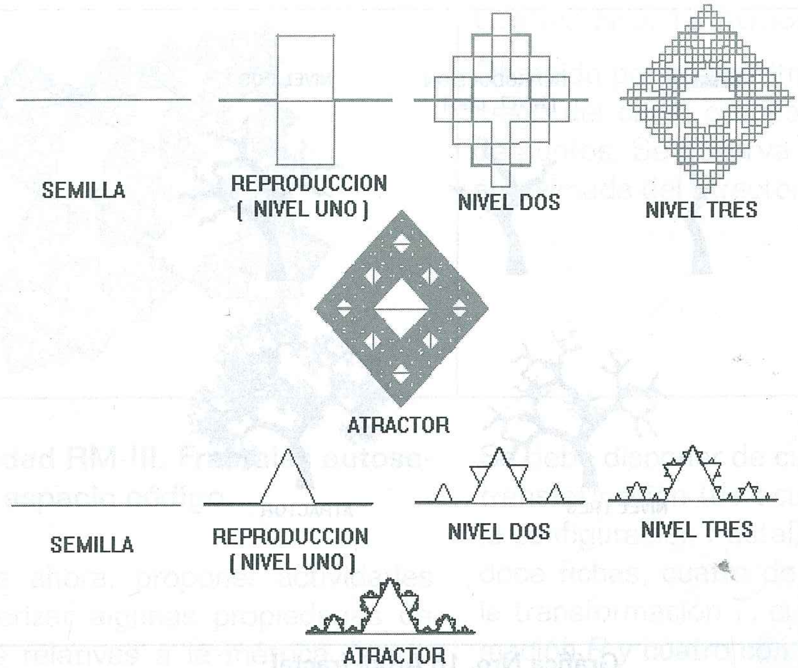
Desde los espacios vectoriales y sus subespacios, una transformación afín es el resultado de la composición de una traslación, con una como, por ejemplo, la reflexión, la rotación y la homotecia, en las cuales se enfatizará. Aquí, lo importante inicialmente, es la descripción verbal de dichas transformaciones, para posteriormente hacer su caracterización matemática, como transformaciones en espacios vectoriales (opcionalmente, particularizadas al plano y espacio tridimensional).

Se adopta un sistema de notación[35] y un lenguaje intuitivo, presentado por el grupo de fractales de la UIS, en su Taller de Fractales[36]. Los dos conceptos claves para empezar esta labor, son el de semilla (marcada con una L en su gráfica) y el mecanismo de reproducción (en cuyas gráficas se marca una L), para visualizar las transformaciones aplicadas, y obtener cada transformación afín que lo compone. Es importante estimular nuestra intuición gráfica, que fue aprovechada por Benoit Mandelbrot, para crear sus imágenes fractales, y hasta para comprender muchos problemas de la matemática abstracta, que le planteaban en su vida escolar. Aún en su vida profesional, él manifiesta poder corregir los errores de programación de computadores de sus colaboradores, explorando las imágenes resultantes[37]. Es por ello que en esta parte "una imagen vale más que mil palabras". Se introduce la noción de nivel de las imágenes que convergen hacia la imagen fractal (atractor), como el índice contador del número de iteraciones aplicadas. Así el nivel cero es la semilla; el nivel uno, la primera iteración, que caracteriza el mecanismo de reproducción; la segunda iteración es el nivel dos, y así sucesivamente (se genera una sucesión de imágenes que, si converge, lo hace a un atractor). En las siguientes gráficas se describen cuatro ejemplos de construcción iterativa de fractales. En la realidad, la gráfica del atractor es una aproximación; formalmente un fractal no puede ser representado fielmente, pues este proceso tiende a infinito. Por esto, abusando del lenguaje, se usa el término fractal o atractor, para dicha aproximación, sin perder de vista esta distinción. Otro aspecto importante, desde el punto de vista formal, es que no importa el tipo de conjunto compacto que se tome como semilla para generar un fractal, pues el atractor que se obtiene, será el mismo. Por convención, generalmente, se toma el segmento unitario $[0,1]$, el cuadrado unitario, $[0,1]\times[0,1]=[0,1]^2$ o el cubo unitario $[0,1]^3$.

35 PEITGEN, Heinz-Otto y otros. Fractals for the classroom, part one, introduction to fractals and chaos. New York: Springer-Verlang, 1992.

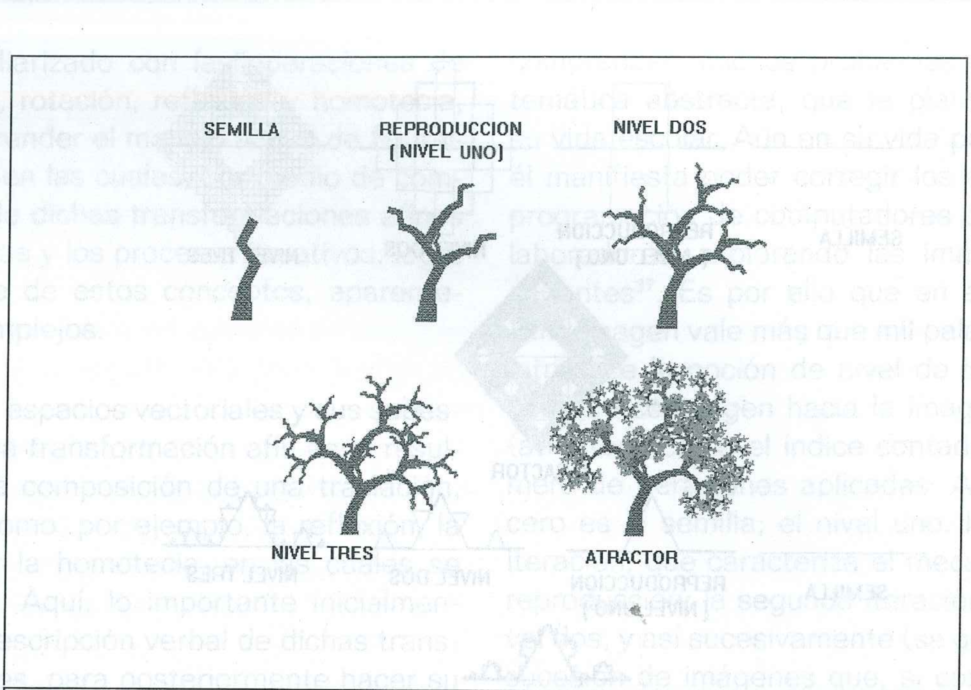
36 Taller de Fractales. XIV Seminario Boyacense de Matemáticas y Física. Escuela Normal de Varones, Tunja. Sociedad Boyacense de Matemáticas. Documento de trabajo grupo Fractales UIS, Tunja, 1992.

37 MANDELBROT, Benoit. Los objetos fractales, forma azar y dimensión. Barcelona: Tusquets Editores, S.A, 1984.

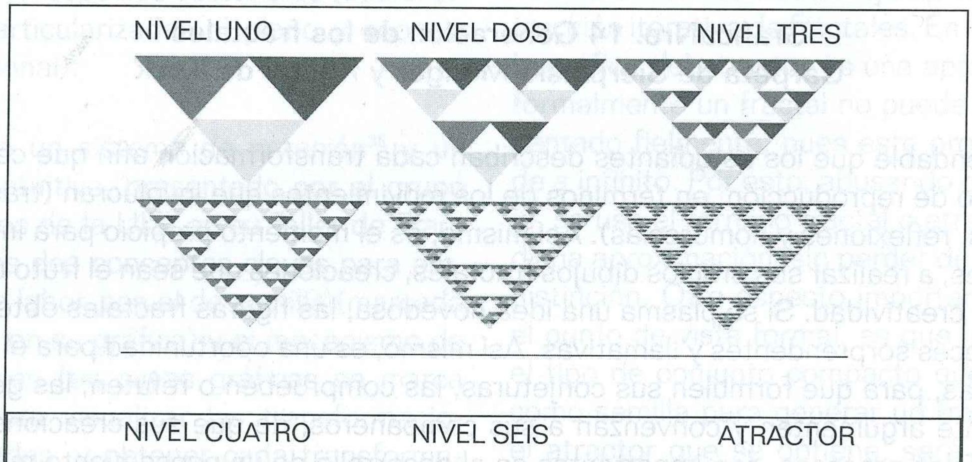


GráficaNro. 14 Generación de los fractales Carpeta de Sierpinski-Menger y fractal de Kock

Es recomendable que los estudiantes describan cada transformación afín que compone el mecanismo de reproducción, en términos de los movimientos que involucran (traslaciones, rotaciones, reflexiones y homotecias). Así mismo, es el momento propicio para invitar a los estudiantes, a realizar sus propios dibujos fractales, creaciones que sean el fruto de su imaginación y creatividad. Si se plasma una idea novedosa, las figuras fractales obtenidas son muchas veces sorprendentes y llamativas. Así mismo, es una oportunidad para el intercambio de ideas, para que formulen sus conjeturas, las comprueben o refuten, las generalicen y finalmente argumenten y convenzan a sus compañeros, de que sus creaciones son las mejores. Tales procesos, son importantes en el desarrollo de un pensamiento matemático, más creativo.



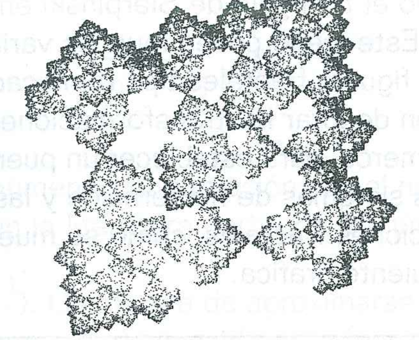
Gráfica Nro. 16 Árbol fractal



Gráfica Nro. 17 Triángulo de Sierpinski

Con relación al atractor, se puede considerar como la representación más aproximada del fractal; es el límite de la sucesión de figuras, determinadas en cada nivel, cuando éste tiende a infinito. Algunos teóricos lo consideran como un concepto fronterizo entre el orden y el caos. Según Briggs y otros[38], *"[...] El atractor representa un poderoso concepto que abarca los mundos espejos del orden y el caos. Un atractor es una región del espacio de fases, que ejerce atracción magnética sobre un sistema, y parece arrastrar el sistema hacia sí".*

38 BRIGGS, John y PEAT, F. David. Espejo y reflejo, del caos al orden. Barcelona: Gedisa Editorial, 1994, pp 36.



Gráfica Nro. 18 Atractor

Obtenido por el algoritmo descrito como el juego del caos, o conocido como la lluvia de puntos. Se observa una representación aproximada del atractor del fractal.

5.2.3 Actividad RM-III. Fractales autosemejantes y espacio código.

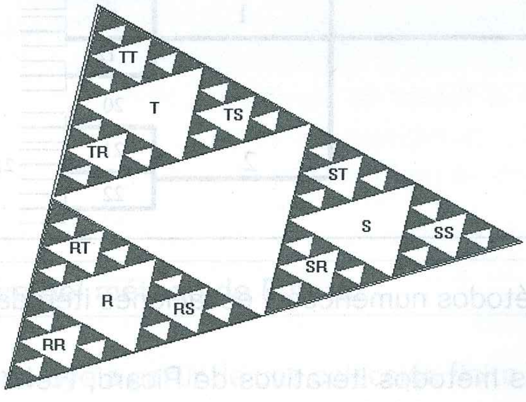
Se pretende ahora, proponer actividades para caracterizar algunas propiedades de los fractales relativas a la métrica (longitud, área o volumen) y a la determinación aproximada de su dimensión. Así mismo, se busca establecer una relación entre las transformaciones afines contractivas que componen un sistema iterado de funciones y el espacio código de sus símbolos.

A continuación se mencionan algunas áreas de trabajo que proporcionan situaciones problemáticas y preguntas relacionadas con los fractales autosemejantes.

Dibujos de fractales por niveles

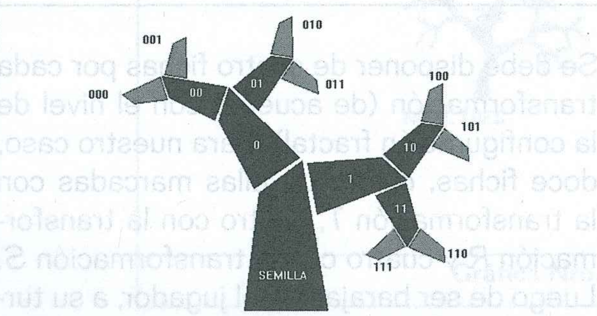
Un juego que se puede desarrollar en grupos, de máximo cuatro integrantes, es el siguiente. Se parte del nivel cuatro (opcional) del triángulo de Sierpinski, como configuración o tablero de juego (ver figura Nro. 19); es de recordar que se necesitan tres transformaciones afines contractivas para su reproducción. Previamente los jugadores describen las traslaciones, reflexiones, rotaciones y homotecias inmersas en cada transformación afín contractiva y proceden a simbolizarlas, por ejemplo S, T y R.

Se debe disponer de cuatro fichas por cada transformación (de acuerdo con el nivel de la configuración fractal). Para nuestro caso, doce fichas, cuatro de ellas marcadas con la transformación T, cuatro con la transformación R y cuatro con la transformación S. Luego de ser barajadas, el jugador, a su turno, elige cuatro cartas, que puede combinar libremente, para ubicar una dirección de la zona que debe colorear, como se ve en la siguiente figura.



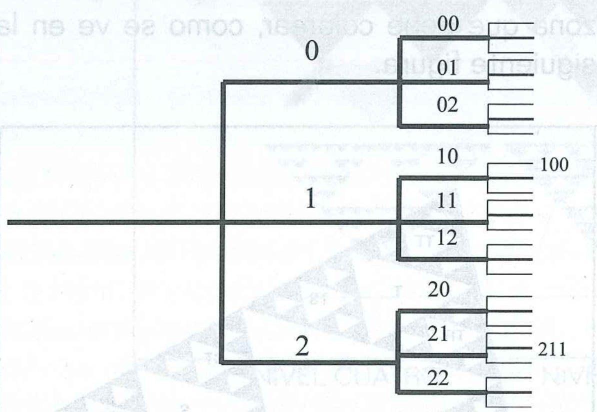
Gráfica Nro. 19 Tablero de Sierpinski para colorear

Se deben escoger tonos vistosos y asignar el mismo color de acuerdo a la última transformación afín que se aplique, para obtener al término del juego, una imagen apropiada; es el momento de aprovechar para afianzar, la notación de derecha a izquierda, en la composición de transformaciones. Cada jugador ganará a su turno, tantos puntos como transformaciones distintas haya empleado en la composición. Si elige una composición cuya dirección ya esté coloreada, no tendrá puntaje. Es ganador del juego quien obtenga el mayor puntaje, una vez haya sido coloreado el triángulo de Sierpinski en cuarto nivel. Este juego posee muchas variantes y en las figuras fractales tipo ramificación, se pueden denotar las transformaciones usando números, para establecer un puente, entre los sistemas de numeración y las representaciones fractales, como se muestra en la siguiente gráfica.



Gráfica Nro. 20-a El fractal binario

Dos transformaciones generan este fractal. Se puede establecer una relación entre el sistema de numeración binario y los niveles del fractal; por ejemplo, el nivel tres, abarca los números representados hasta con tres cifras binarias {0, 1}



Gráfica Nro. 20-b El fractal ternario

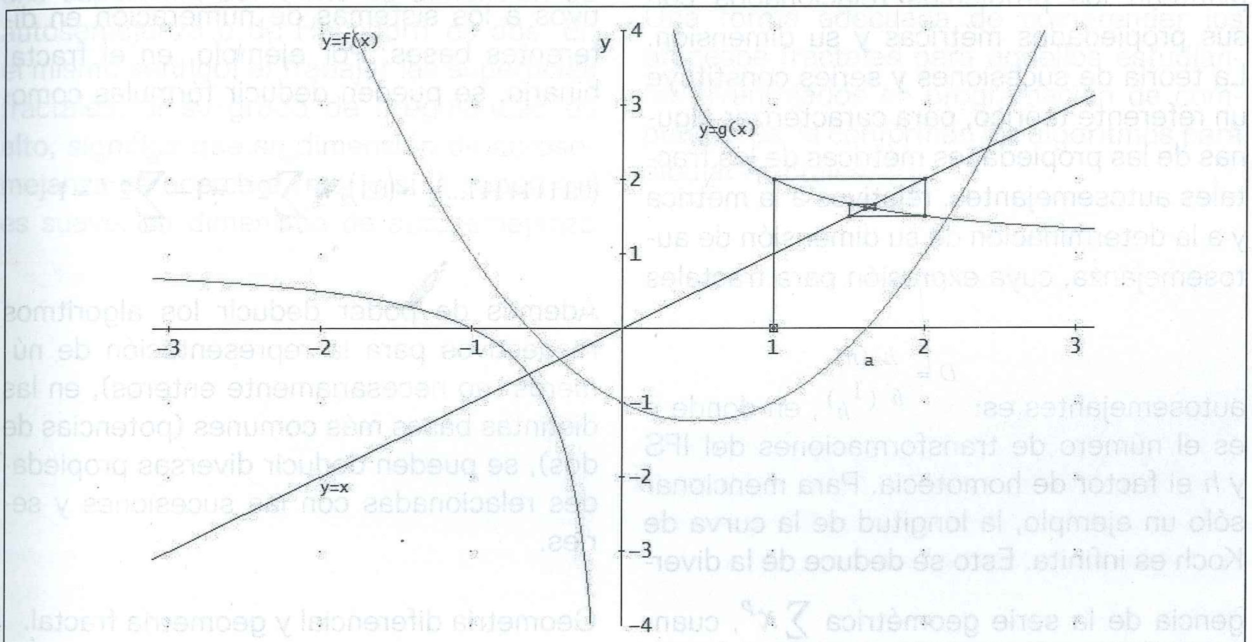
Tres transformaciones generan este fractal. Se puede establecer una relación entre el sistema de numeración Ternario y los niveles del fractal; por ejemplo, el nivel tres, abarca los números representados hasta con tres cifras binarias {0, 1, 2 }

Métodos numéricos y ecuaciones iteradas.

Los métodos iterativos de Picard, Newton, Secante, Muller, entre otros, que son empleados para calcular, de manera aproximada, las raíces de una ecuación no lineal, pueden ser empleados para evidenciar procesos de naturaleza iterativa, sin el uso de sus gráficos asociados. Los límites de las sucesiones que generan estas fórmulas iteradas, pueden ser aproximados, usando sencillos programas de calculadoras o software de matemática simbólica (tipo, Derive o Matlab). Al dibujar las órbitas que las sucesiones generan, su interpretación gráfica se constituye en una forma de deducir propiedades matemáticas de las series y sucesiones. Este hecho se ilustra con el siguiente ejemplo: es conocido el resultado de la expresión,

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}$$

Dicho número, tiene relación con el número áureo en la literatura de teoría de números ($\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$). Una forma de aproximarse al número áureo a , es considerar la función iterativa, $g(x_{k+1})=1+\frac{1}{x_k}$, iniciando con el valor $x_0=1$. Al construir la órbita de dicha función, se obtiene la sucesión $O_g(x_0)=\left\langle g^k(x_0)\right\rangle_{k\geq 0}$, en donde se usa la composición usual de funciones: $g^0(x_0)=x_0$ y $g^k(x_0)=g(g^{k-1}(x_0))$. La sucesión en mención, tiene como límite el número $a=1+a$. Teniendo presente el método de Picard, o iterativo simple, procediendo a la inversa de cómo se hace en este método numérico, se puede deducir que la ecuación que se está solucionando es: $f(x)=0$, en donde f está definida como, $f(x)=x^2-x-1$. En la siguiente gráfica se ilustra este proceso.



Gráfica Nro. 21 Significado gráfico del método de Picard.

El espacio código de direcciones.

A partir de las transformaciones de un sistema iterado de funciones (IFS), es posible conformar un espacio de símbolos, llamado por Barnsley M. [39], "el espacio código". Se construye a partir de una colección finita de símbolos $S=\{a_1,a_2,a_3,...,a_k\}$, (tantos como transformaciones contenga el IFS), considerando todas las palabras (concatenación infinita de símbolos), es decir, el espacio código se denota, por la colección de palabras, en símbolos, $\Sigma=\{p=a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}a_{i_4}.../\forall_j, a_{i_j}\in S\}$. Existe una función inyectiva entre un fractal como

39 BARNSLEY, Michael. Fractals everywhere. San Diego: Academic Press INC, 1988.

conjunto y el espacio código de sus símbolos. La imagen de cada punto, por dicha función, es llamada su "dirección". Además, se puede dotar al espacio código con una métrica y considerarlo como espacio métrico completo. Tales espacios son trabajados en Sabogal, Sonia.

Propiedades métricas y dimensión de autosemejanza.

Una vez se hayan trabajado suficientemente las representaciones del fractal y caracterizado matemáticamente su modelo, se plantean los problemas relacionados con sus propiedades métricas y su dimensión. La teoría de sucesiones y series constituye un referente teórico, para caracterizar algunas de las propiedades métricas de los fractales autosemejantes, relativos a la métrica y a la determinación de su dimensión de autosemejanza, cuya expresión para fractales autosemejantes es: $D = \frac{\ln(n)}{\ln(1/h)}$, en donde n es el número de transformaciones del IFS y h el factor de homotecia. Para mencionar sólo un ejemplo, la longitud de la curva de Koch es infinita. Esto se deduce de la divergencia de la serie geométrica $\sum x^p$, cuando el número real p, es mayor o igual a uno ($p \geq 1$)[40]; en este caso, la longitud de la curva de Koch, está dada por la serie $\sum\left(\frac{4}{3}\right)^p$. El fractal copo de nieve, construido partiendo de un triángulo equilátero, en donde cada uno de sus lados es la curva de Koch, tiene perímetro infinito (pues, es igual a tres veces la longitud de la curva de Koch) y área determinada por $A = \frac{2}{3}\sqrt{3a}$, en donde a es el lado del triángulo. No deja de sorprender, que este fractal tenga área finita y perímetro infinito al igual que muchos fractales de este tipo, consideradas en la literatura matemática como islas fractales.

Fractales autosemejantes y sistemas de numeración.

La relación que existe entre los puntos de un fractal y su "dirección", brinda una oportunidad para tratar problemas relativos a los sistemas de numeración en diferentes bases. Por ejemplo, en el fractal binario, se pueden deducir fórmulas como:

$$(0{,}11111111\ldots)_2 = (0.\bar{1})_2 \cong \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = 1$$

Además de poder deducir los algoritmos respectivos para la representación de números (no necesariamente enteros), en las distintas bases más comunes (potencias de dos), se pueden deducir diversas propiedades relacionadas con las sucesiones y series.

Geometría diferencial y geometría fractal.

La comparación de curvas diferenciables en todos sus puntos y curvas no diferenciables en muchos de ellos, ofrece un campo para distinguir la geometría de formas "suaves" de la geometría diferencial y formas "sumamente irregulares", propias de la geometría fractal. No olvidar que diversos objetos de la naturaleza nos hacen evocar estas últimas formas. Varias consideraciones de este tipo, como el concepto de dimensión de Hausdorff, han servido para calcular, por

40 APÓSTOL, Tom M. Calculus, volumen I. Barcelona: Editorial Reverté, S. A. 1972, pp 475.

ejemplo, la longitud costera de las islas. Otro caso digno de mencionar, ocurre cuando se desean modelar terrenos irregulares en computación gráfica, usando algoritmos de naturaleza fractal.

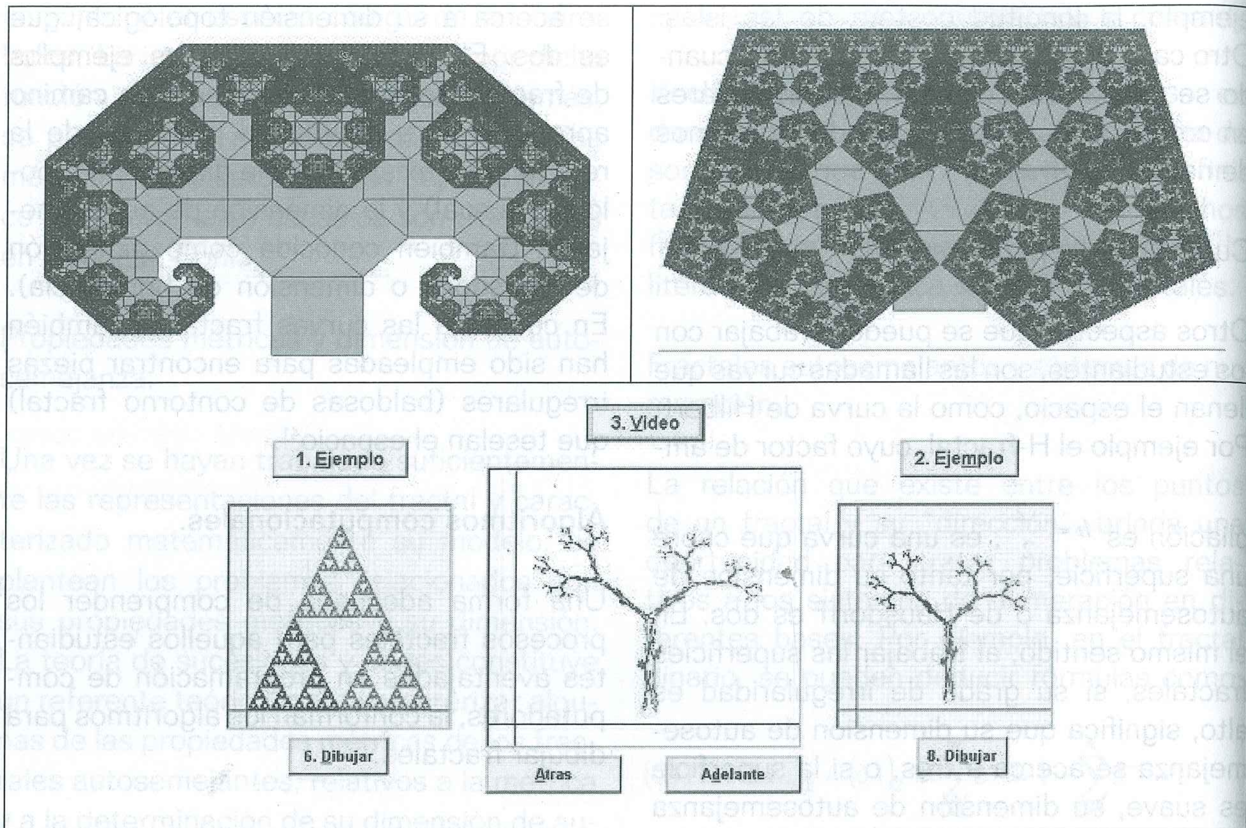
Curvas que llenan el espacio.

Otros aspectos que se pueden trabajar con los estudiantes, son las llamadas curvas que llenan el espacio, como la curva de Hilbert. Por ejemplo el H-fractal, cuyo factor de ampliación es $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$, es una curva que cubre una superficie, por tanto su dimensión de autosemejanza o de Hausdorff es dos. En el mismo sentido, al trabajar las superficies fractales, si su grado de irregularidad es alto, significa que su dimensión de autosemejanza se acerca a tres, o si la superficie es suave, su dimensión de autosemejanza se acerca a su dimensión topológica, que es dos. El trabajo con diversos ejemplos de fractales clásicos, constituye un camino apropiado para abordar el problema de la relación que existe entre la dimensión topológica (usual) y la dimensión de autosemejanza (también conocida como dimensión de Hausdorff o dimensión de homotecia). En cuanto a las curvas fractales, también han sido empleadas para encontrar piezas irregulares (baldosas de contorno fractal) que teselan el espacio[41].

Algoritmos computacionales.

Una forma adecuada de comprender los procesos fractales para aquellos estudiantes aventajados en programación de computadores, la conforman los algoritmos para dibujar fractales.

41 SCHROEDER, Manfred R. Fractals, chaos, power laws. Minutes from an infinite paradise. New York: W. H. Freeman and Company. 1996.



Gráfica Nro. 22 Fractales dibujados por programación de algoritmos en computador

5.2.4 Actividad RM-IV. Creación figuras fractales en computador

Se pretende en esta fase, utilizar programas especializados para el dibujo de los fractales, a partir de los dibujos, bosquejos, diseños y modelos matemáticos ya elaborados por los estudiantes en lápiz y papel, usando los elementos de construcción geométrica.

El uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC's), es un aspecto ampliamente difundido en la actualidad. Particularmente, se han desarrollado diversos proyectos para incorporar las nuevas tecnologías de la información al currículo de matemáticas, uno de los cuales fue liderado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), dirigido por Ana Celia Castiblanco, junto con varias universidades e instituciones de educación básica y media. Este proyecto ha generado un impulso y fortalecimiento para el uso de los computadores y la calculadora, la geometría dinámica, y las aplicaciones de matemática simbólica, en el aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario. Es cotidiano el uso programas como Derive, Matlab, Mathemática, Maple, Matcad para el aprendizaje en matemáticas, en los llamados "laboratorios de matemáticas". Los programas de geometría dinámica proporcionan un ambiente novedoso para desarrollar el pensamiento espacial y aprender diversos tipos de geometría. Existe gran diversidad de programas de computador cuyo propósito es dibujar fractales.

En la generación de los fractales de esta actividad, es fundamental que los estudiantes desarrollen su percepción gráfica, para identificar las transformaciones afines que los originan, y los movimientos en el plano (2D) o espacio (3D), inmersos en cada una de ellas. La descripción verbal es importante. Se establece un sistema simbólico en el cual el ícono en forma de L, facilita la interpretación gráfica de la transformación.

Como ya se ha mencionado, un fractal autosemejante se genera mediante un modelo geométrico bien definido, que se ha llamado sistema iterado de funciones (IFS's). Un aspecto fundamental es caracterizar cada una de las transformaciones afines contractivas que lo conforman. Por ejemplo, en el plano cada transformación afín se caracteriza con seis coeficientes que determinan la transformación afín: $T(v) = Av + B$ definida del plano ($\Re^2$), en sí mismo. En donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Análogamente una transformación afín en el espacio tridimensional (3D), se determina con doce coeficientes. De manera general, una transformación afín queda caracterizada por una matriz asociada a la transformación lineal y una matriz determinada por la traslación, definidas como transformaciones de un espacio vectorial en sí mismo.

Antes de iniciar el trabajo de los estudiantes con las aplicaciones de computador para dibujar fractales, es necesario que para cada fractal susceptible de ser dibujado se haya elaborado o determinado su modelo e identificadas sus características matemáticas.

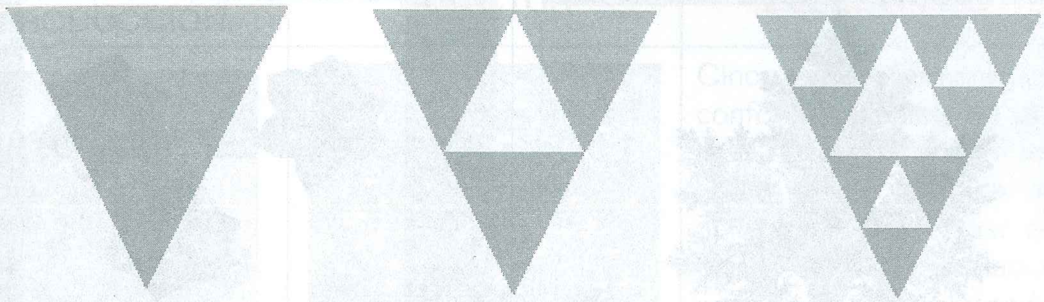
A manera de ejemplo, se considera el Triángulo de Sierpinski, caracterizado primero usando lenguaje usual y luego simbólicamente como se muestra en la tabla. Su sistema iterado de funciones, está conformado por tres transformaciones afines contractivas definidas sobre el plano (2D), que se describen así. Partiendo de un triángulo como semilla (recordar que si se parte de un cuadrado, el atractor es el mismo), la primera transformación afín contractiva se obtiene de aplicar una homotecia a la mitad, denotada en la gráfica como T_1. Para la segunda transformación, simbolizada como T_2, se aplica una homotecia a la mitad seguida de una traslación de media unidad a la derecha. La tercera transformación, denotada T_3, es el resultado de componer en su orden, una homotecia a la mitad (transformación determinada por $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$) seguida de una traslación de un cuarto de unidad a la derecha y media unidad hacia arriba (es decir, una traslación determinada por el vector $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$). El sistema iterado de funciones queda caracterizado con seis coeficientes por cada transformación. En este caso doce coeficientes para las tres transformaciones. En la siguiente tabla se presenta el modelo que determina de manera precisa el fractal de Sierpinski.

Transformación	Movimientos	Coeficientes						Probabilidad	Propiedades
		a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b_1	b_2		
T_1	$H_{\frac{1}{2}}$	0.5	0	0	0.5	0	0	0.3333..	**Dimensión**
T_2	$T_{\left[\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{smallmatrix}\right]} \circ H_{\frac{1}{2}}$	0.5	0	0	0.5	0	0.5	0.3333..	$D = \frac{Ln(3)}{Ln(2)} \cong 1.5850$
T_3	$T_{\left[\begin{smallmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right]} \circ H_{\frac{1}{2}}$	0.5	0	0	0.5	0.25	0.5	0.3333..	**Area** $A = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k = 0$
Semilla, cuadrado unitario $C_0 = [0,1]\times[0,1] \subset \Re^2$					**Mecanismo de Reproducción** $\{T_1(C_0), T_2(C_0), T_3(C_0)\}$				

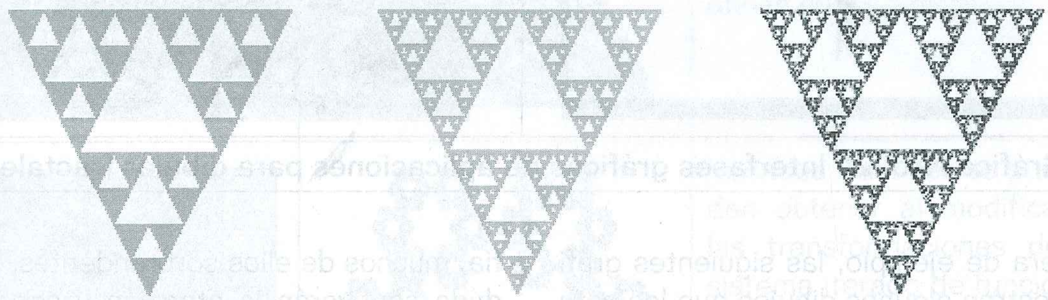
Tabla. Nro. 2 Modelo del triángulo de Sierpinski

Al presentar su gráfica en diversos niveles, por ejemplo en el nivel uno, se dibujan tres triángulos, en el nivel dos, nueve triángulos que resultan de hacer todas las posibles composiciones de dos transformaciones de las tres transformaciones que conforman el IFS. En el n-ésimo nivel, se dibujarían 3^n triángulos, obtenidos al componer n transformaciones, tomadas de la colección $\{T_1, T_2, T_3\}$. Cuando el proceso iterativo tiende a infinito, se obtiene el atractor, que es la representación del fractal. Como en los dibujos hechos por el estudiante o simulados en computador, los procesos son finitos, es decir el espacio es discreto; sólo vemos una aproximación del fractal (si se cuenta con buena resolución en la pantalla del computador, la imagen mental que se elabora tiene características de continuidad).

El sistema iterado de funciones, se identifica intuitivamente como el mecanismo de reproducción, y se puede tomar como un algoritmo que contiene las instrucciones que permiten generar el fractal. Un ejercicio sorprendente para el estudiante, consiste en generar el fractal de Sierpinski, partiendo de un cuadrado como semilla, y luego cambiarlo por un triángulo. Al final, se dará cuenta que el atractor obtenido es el mismo, pues al caracterizar las transformaciones afines, el proceso para obtener el atractor es independiente de la semilla con la cual inicia, aunque la grafica de los niveles en cada caso no coincidan. Aunque parezca imposible el fractal no depende de la forma de la semilla sino del mecanismo de reproducción que lo genera. Aquí la semilla tiene interés únicamente didáctico, que facilita la visualización de la representación aproximada del fractal.



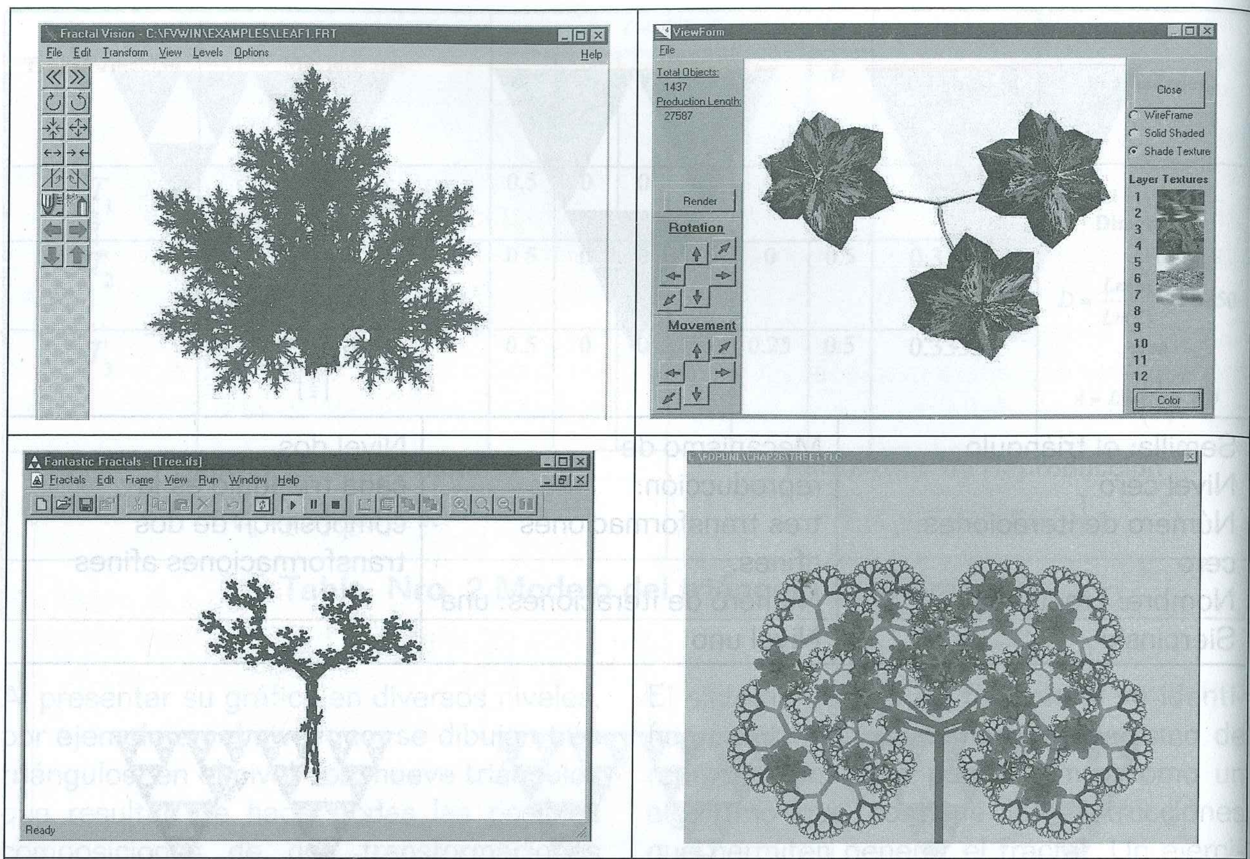
Semilla: el triángulo Nivel cero Número de iteraciones: cero Nombre: Fractal de Sierpinski	Mecanismo de reproducción: tres transformaciones afines. Número de iteraciones: una Nivel uno	Nivel dos, cada triángulo es la composición de dos transformaciones afines



Nivel tres. Cada triángulo es el resultado de componer tres transformaciones afines.	Nivel nueve. Número total de triángulos : tres a la nueve.	Atractor Área del fractal:nula Dimensión:ln(3)/ln(2).

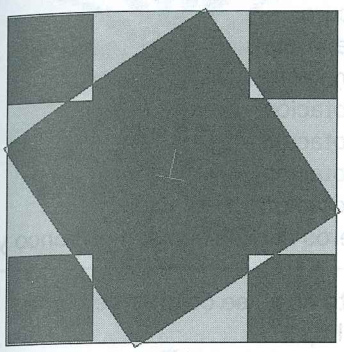
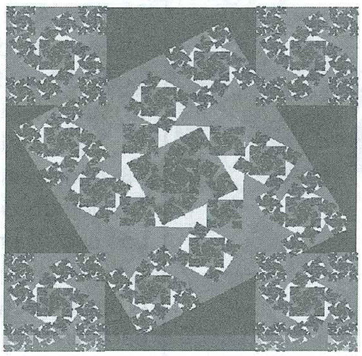
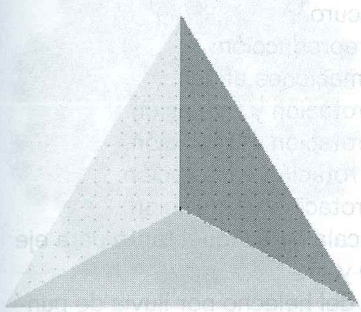
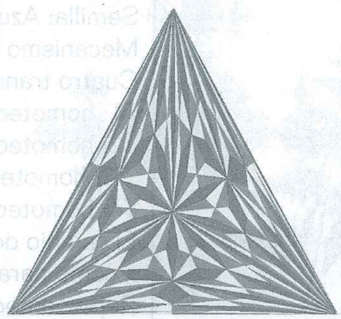
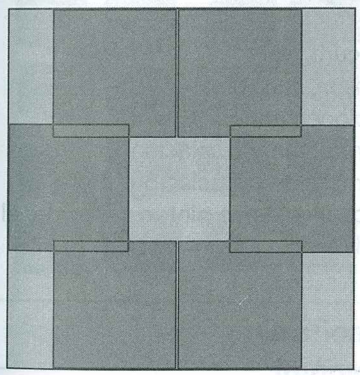
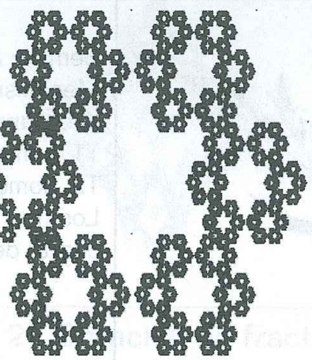
Gráfica Nro. 23 Generación del triángulo de Sierpinski

Las prácticas en laboratorio de informática, se inician una vez terminada la fase de dibujo en lápiz y papel y la determinación del modelo de cada fractal. Para dibujar y modelar fractales autosemejantes, generados por sistemas iterados de funciones, se trabajaron con los estudiantes y el grupo investigador, los programas: Fractal Visión, Brazil, Fantastic Fractals, Fraclin, Fractgraf, Mathematica, Maple, Matlab, Cabri Geometre II, Sketchpad Geometry, entre otros.



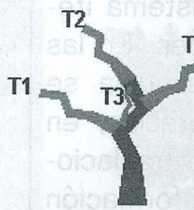
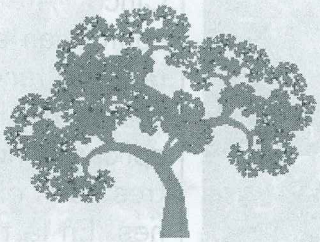
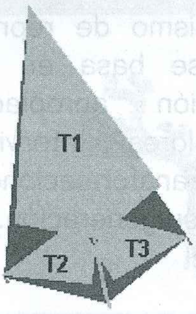
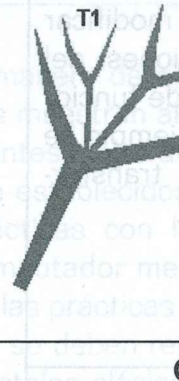
Gráfica Nro. 24 Interfases gráficas de aplicaciones para dibujar fractales

A manera de ejemplo, las siguientes gráficas muestran algunos dibujos que los estudiantes elaboraron, a partir de los modelos pre-establecidos, obtenidos durante las prácticas con los diversos programas de computador mencionados. En primer lugar, en las prácticas de laboratorio de informática, se deben reproducir los modelos de los fractales clásicos, con el fin de enriquecer la experiencia en el manejo de los programas para dibujar fractales. La meta de esta actividad, es la de brindar un ambiente y espacio para la creatividad, en donde ellos puedan inspirarse y crear modelos propios, distintos de los contenidos en la bibliografía, muchos de ellos sorprendentes, que sin duda cautivarán la atención y servirán de motivación, para el trabajo posterior sobre estos temas. Por último, es importante que el estudiante prepare el camino para formalizar matemáticamente los conceptos que subyacen en los sistemas iterados de funciones (IFS's), y contextualizarlos de manera general en espacios métricos completos, sin que éste sea un obstáculo para la creación artística de los modelos fractales del estudiante y, que sin lugar a dudas, es solamente el camino inicial en el trasegar posterior, en el amplio mundo de la teoría fractal.

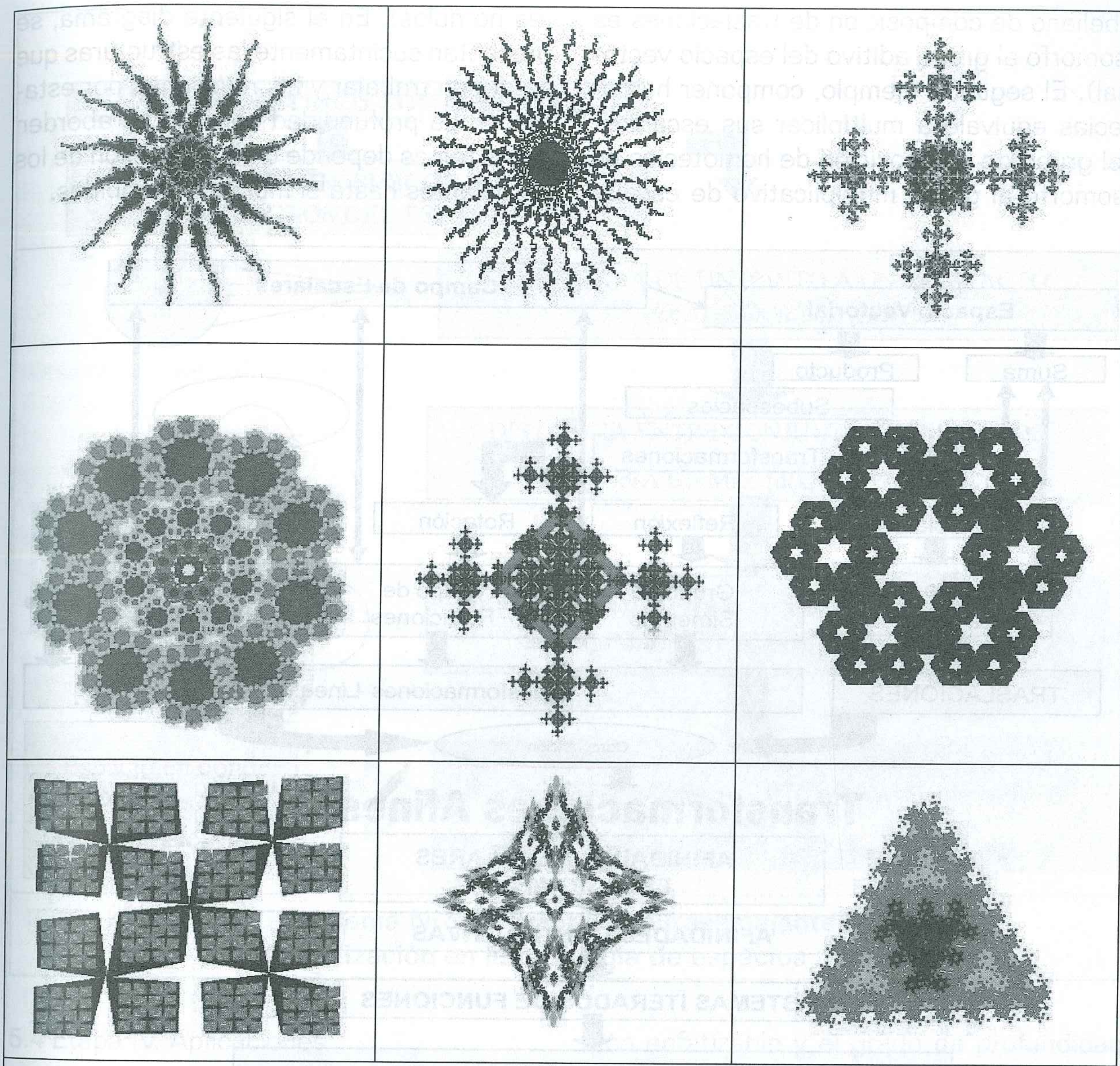
SEMILLA Y REPRODUCCIÓN	ATRACTOR	DESCRIPCIÓN
		Cinco transformaciones conforman el sistema iterado de funciones. En las cuatro de la esquina se aplicaron homotecias, en tres de ellas traslaciones. En la transformación del centro además de las mencionadas interviene la rotación.
		El mecanismo de reproducción se basa en la triangulación apropiada de los colores . Intervienen tres transformaciones afines en su generación.
		Variados fractales se pueden obtener al modificar las transformaciones del sistema iterado de funciones. Para este ejemplo se tomaron cinco transformaciones afines.

Gráfica Nro. 25 Creación de fractales clásicos

Como evidencia de la efectividad de esta Teoría Fractal en la modelación de los objetos de la naturaleza, se presentan los siguientes ejemplos, con la seguridad de que se constituirán posteriormente en sencillos ejemplos, comparados con los modelos formulados por los estudiantes, tomados en las prácticas realizadas para conocer con más detalle los objetos de la naturaleza existentes en su medio.

SEMILLA Y REPRODUCCIÓN	ATRACTOR	DESCRIPCIÓN
		Semilla: Azul oscuro. Mecanismo de reproducción: Cuatro transformaciones afines. T1: homotecia, rotación y traslación. T2: homotecia, rotación y traslación. T3: homotecia, rotación y traslación. T4: homotecia, rotación y traslación. Los cuatro primeros niveles simulan el tronco y las ramas. A partir del quinto nivel, se colorea de verde para simular las hojas.
		Semilla: Azul oscuro. Mecanismo de reproducción: Cuatro transformaciones afines. T1: homotecia, rotación y traslación. T2: homotecia, rotación y traslación. T3: homotecia, rotación y traslación. T4: homotecia, rotación y traslación. El cambio de escala no es igual tanto para eje x como para eje y. Representación del helecho por lluvia de puntos.
		Semilla: Azul oscuro. Mecanismo de reproducción: dos transformaciones afines T1: homotecia, rotación y traslación. T2: homotecia, rotación y traslación. Los tres primeros niveles se pintan de verde, el cuarto de amarillo.

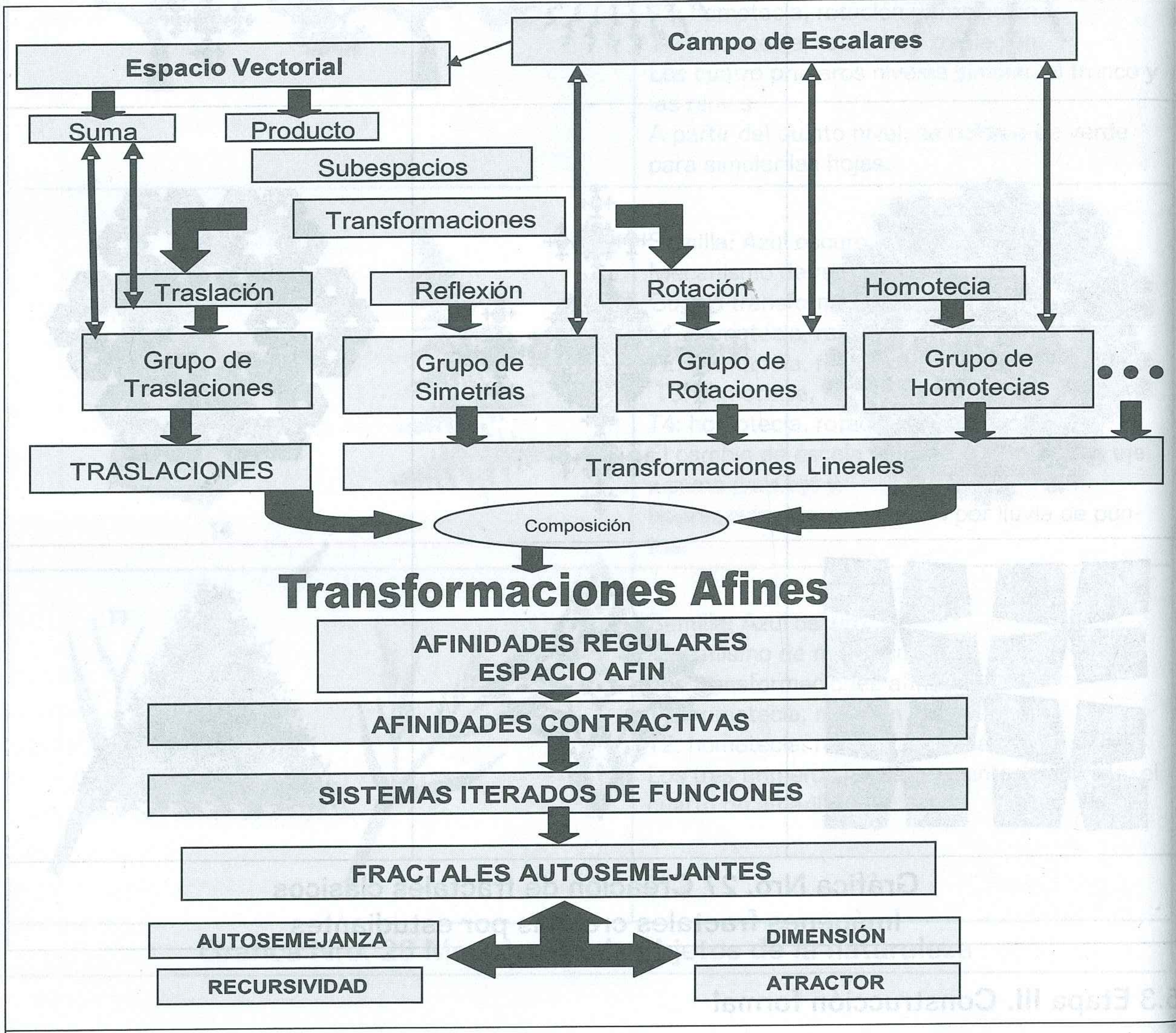
Gráfica Nro. 26 Modelación de objetos de la naturaleza



Gráfica Nro. 27 Creación de fractales clásicos
Imágenes fractales creadas por estudiantes

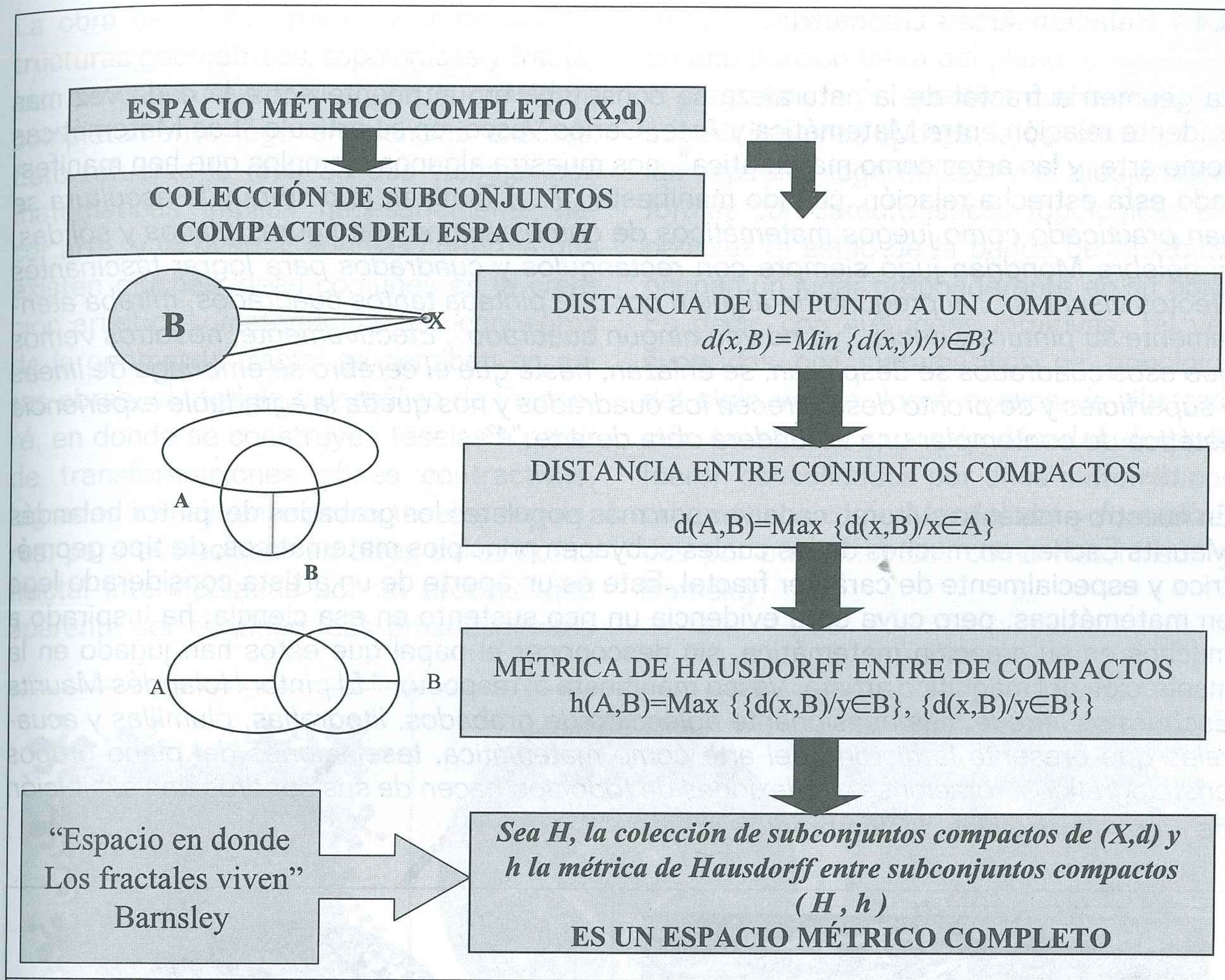
5.3 Etapa III. Construcción formal

Las estructuras algebraicas, son el contexto natural para los fractales autosemejantes, generados por sistemas iterados de funciones (IFS's). Inicialmente, un aspecto importante, es detectar las estructuras de grupo de las transformaciones que han sido trabajadas, estableciendo su relación con otras de grupo del espacio vectorial, cuando son consideradas las operaciones suma de vectores y producto de un escalar por un vector. Las relaciones también se pueden establecer entre el campo escalar al considerar las operaciones de suma y producto. Para mencionar solo dos ejemplos de dichas relaciones, componer traslaciones es matemáticamente equivalente a sumar vectores (dicho de otra forma, el grupo abeliano de composición de traslaciones es isomorfo al grupo aditivo del espacio vectorial). El segundo ejemplo, componer homotecias equivale a multiplicar sus escalares (el grupo de composición de homotecias es isomorfo al grupo multiplicativo de escalares no nulos). En el siguiente diagrama, se presentan sucintamente las estructuras que se deben trabajar y las relaciones por establecer. La profundidad con que se aborden estos temas depende de la formación de los estudiantes hasta el momento recibidas.



Esquema Nro. 3 Contextualización teórica de los fractales autosemejantes.

Una alternativa más formal es la de contextualizar los fractales desde la topología, especialmente como subconjuntos que están dentro de los espacios métricos completos. En la sección de teoría de fractales se menciona brevemente este enfoque, que se esquematiza en el siguiente diagrama.



Esquema Nro. 4. Fractales autosemejantes
Contextualización en la topología de espacios métricos

5.4 Etapa IV. Aplicaciones

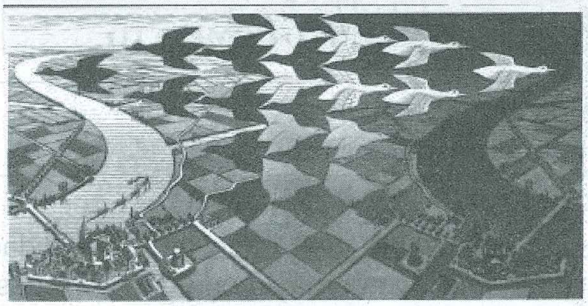
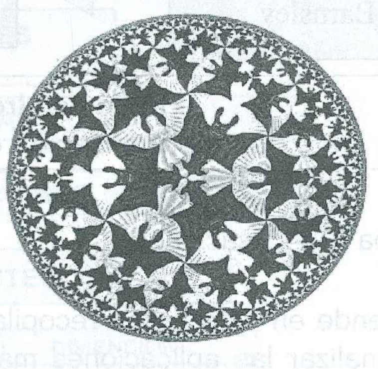
Se pretende en esta etapa recopilar, estudiar y analizar las aplicaciones más conocidas de la teoría fractal de la naturaleza. La gran cantidad de problemas en donde se aplica este tipo de geometría permite describir sólo algunas aplicaciones, que se clasifican en modelación de plantas y ecosistemas, modelación de terrenos, teoría del caos y relación arte - geometría.

Los intereses y expectativas de los estudiantes determinan la temática de aplicación enfatizable y el grado de profundidad con el cual se aborda su estudio. Por cuestiones prácticas, es recomendable que cada estudiante aborde pocas aplicaciones, pues en el ámbito de la ciencia, ellas involucran temáticas avanzadas que corresponden al desarrollo de investigación de punta. Si se desea profundizar un poco más, se deben precisar las temáticas elegidas, pues en cada una de ellas se detectan también muchos problemas por solucionar, cada uno de los cuales posee grados diversos de complejidad, aunque generalmente presentan alto grado de dificultad.

5.4.1 Relación Arte - Geometría

La geometría fractal de la naturaleza se constituye en un puente entre la cada vez más evidente relación entre Matemática y Arte. Carlos Vasco, en su artículo "Las Matemáticas como arte, y las artes como matemática", nos muestra algunos ejemplos que han manifestado esta estrecha relación, cuando manifiesta: *"[...] También la pintura y la escultura se han practicado como juegos matemáticos de combinaciones de figuras planas y sólidas. El célebre Mondrian jugó siempre con rectángulos y cuadrados para lograr fascinantes efectos visuales...; al preguntarle alguien por qué pintaba tantos cuadrados, miraba atentamente su pintura y decía: "yo no veo ningún cuadrado". Efectivamente, nosotros vemos que esos cuadrados se desplazan, se enlazan, hasta que el cerebro se embriaga de líneas y superficies y de pronto desaparecen los cuadrados y nos queda la agradable experiencia estética de contemplar una verdadera obra de arte."* [42]

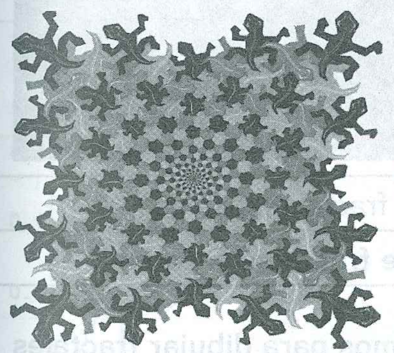
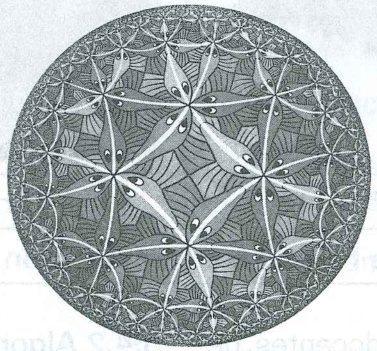
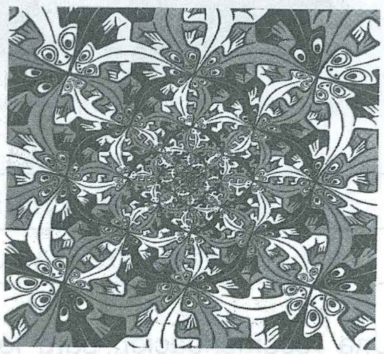
En nuestro ambiente cultural, cada vez son más populares los grabados del pintor holandés Maurits Escher, en muchos de los cuales subyacen principios matemáticos, de tipo geométrico y especialmente de carácter fractal. Este es un aporte de un artista considerado lego en matemáticas, pero cuya obra evidencia un rico sustento en esa ciencia; ha inspirado a muchos en su creación matemática, sin desconocer el papel que estos han jugado en la inspiración del magnífico artista. Vasco manifiesta al respecto: *" El pintor Holandés Maurits Escher nos legó la más apasionante colección de grabados, litografías, plumillas y acuarelas que presenta la historia del arte como matemática, teselaciones del plano grupos cristalográficos, rotaciones y reflexiones de todo tipo hacen de sus cuadros una exhibición de juegos artificiales deslumbrantes"* [43]

	
Gráfica Nro. 28 Día y Noche, grabado en madera. 1939.	Gráfica Nro. 29 Límite Circular IV, grabado en madera. 1960.

42 VASCO, Carlos E. Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas. Volumen I, Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, MEN, 1992, pp. 106.

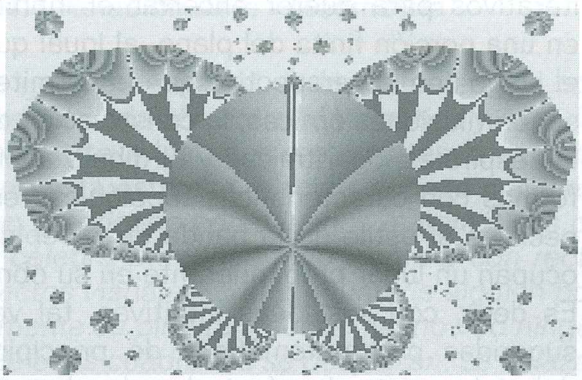
43 VASCO, Carlos E. Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas. Volumen I, Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, MEN, 1992, pp. 106.

La obra de Escher presenta inmersas estructuras geométricas, topológicas y fractales, aunque su autor siempre se consideró completamente lego en ciencias exactas. Esto refuerza la idea de que trabajar con matemáticas implica necesariamente hacer arte, y viceversa; además confirma que existen muchas ideas comunes en la creación artística y matemática. Los conceptos de la geometría fractal se perciben en estas obras, el modelo hiperbólico de Poincaré, en donde se construyen teselas a partir de transformaciones afines contractivas, logradas inicialmente como teselas regulares, para evolucionar en otras de contorno fractal intermediadas por un proceso que aparenta ser continuo. Los procedimientos iterativos para querer encerrar el infinito en una porción finita del plano, al igual que el juego con la perspectiva que le permiten sugerir ilusiones ópticas, la construcción de las espirales logarítmicas y el dibujo sobre formas con características topológicas especiales al estilo de la banda de Moebius, ocupan un lugar preponderante en su obra. Es decir, con sus ideas intuitivas, tal vez sugeridas por matemáticos de principios del siglo veinte, logró niveles de abstracción en el arte, que solo décadas después fueron consolidados por unos matemáticos pragmáticos como Mandelbrot y formalizados por otros teóricos como Hutchinson y Barnsley.

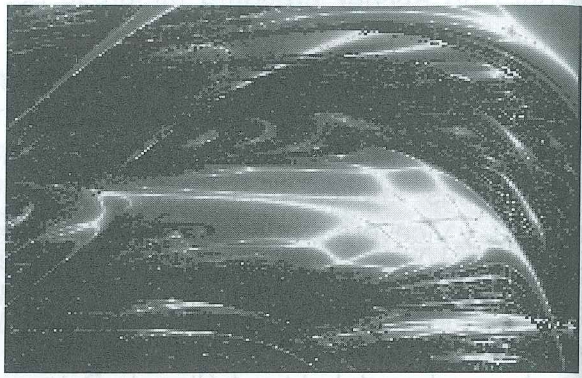
		
Evolución II, grabado en madera. 1939.	Límite Circular III, grabado en madera, 1959	Más y Más Pequeño I, xilografía. 1956.

Gráfica Nro. 30 Grabados de Escher con característica fractal

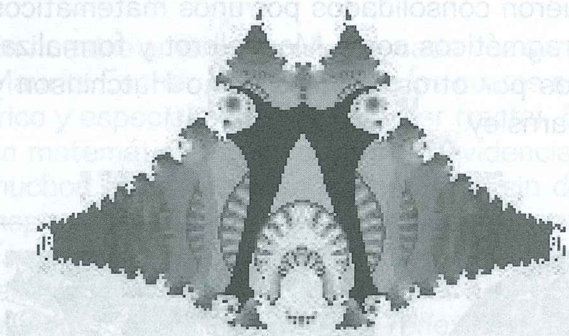
Escher puede ser considerado el precursor del naciente arte fractal, que debe su gran apogeo al desarrollo de los computadores y a las redes de información que divulgan rápidamente sus creaciones a través de aplicaciones de dominio público como Fractint, considerado patrimonio de los "gomosos" en fractales, disponible en varios servidores de Internet.



Arte fractal: Mariposa[44]



Arte fractal: Fuego[45]



Arte fractal: Buho[46]

Arte fractal: Espirales[47]

Gráfica Nro. 31 Arte Fractal con la aplicación de fractales Fractint

Una recomendación para los docentes de matemáticas es incorporar esta evidente relación matemática-arte en actividades de aprendizaje de la geometría, y estimular la investigación en temas afines, para acercarnos a la dimensión artística de las matemáticas. Ignorar la estrecha relación geometría y arte, equivale a privarnos de trabajar con estudiantes apasionados por las matemáticas, motivados y entusiastas, que verán la matemática como una oportunidad para la inspiración y el desarrollo de la creatividad.

5.4.2 Algoritmos para dibujar fractales

Detectar patrones de orden en procesos aparentemente caóticos para representarlos en figuras de naturaleza fractal es uno de los aspectos inherentes a la teoría del caos.

Una actividad inicial consiste en plantear a los estudiantes el siguiente juego en grupos de cuatro personas. Se basa en la composi-

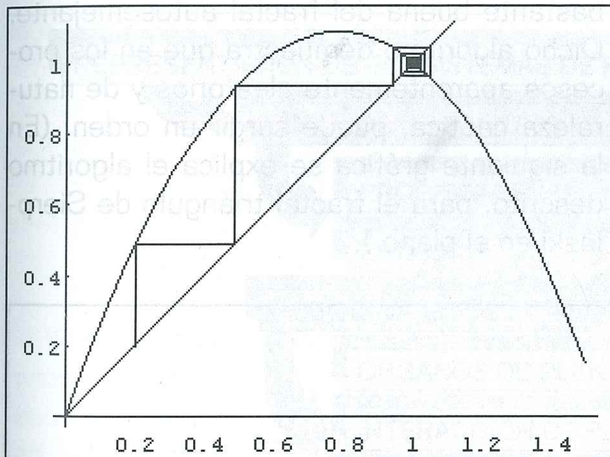
44 WEGNER, Tim y TYLER, Bert. El mundo de los fractales, convierta los números en una realidad fractal. Madrid: Ediciones Anaya Multimedia S.A, 1995.
45 Ibídem
46 Ibídem
47 Ibídem

ción iterada de la ecuación $x_{n+1} = Nx_n(1 - x_n)$ y el valor inicial fijo $x_0 = 0.5$. Se hacen dos grupos, de cuatro fichas amarillas el primero (con los dígitos 0, 1, 2 y 3, uno en cada ficha) y de diez fichas blancas el segundo (cada una, marcada con uno de los dígitos). Cada jugador, a su turno, selecciona una ficha amarilla que representa las unidades y una blanca que representa las décimas. El valor obtenido reemplaza al valor de N, en la ecuación iterante. Se programa la calculadora con la ecuación resultante. A continuación cada jugador itera la ecuación, partiendo de un valor $x_0 = 0.5$. Se calculan los primeros valores de la secuencia finita:

$$\left\langle x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0)))\ldots f^k(x_0)\right\rangle_{0\leq k\leq 30}$$

Si dicha secuencia converge a algún valor (determinando un rango de error), el jugador que eligió las tarjetas gana un punto. Es ganador del juego el que obtenga el mayor puntaje.

En el siguiente cuadro se expresa el significado gráfico de realizar tales iteraciones, que el estudiante puede dibujar como trabajo complementario, usando cualquier programa de matemática simbólica. La sucesión anteriormente descrita, se llama la órbita de la función en el punto dado. En la parte final se presenta la gráfica del atractor que representa este fenómeno.



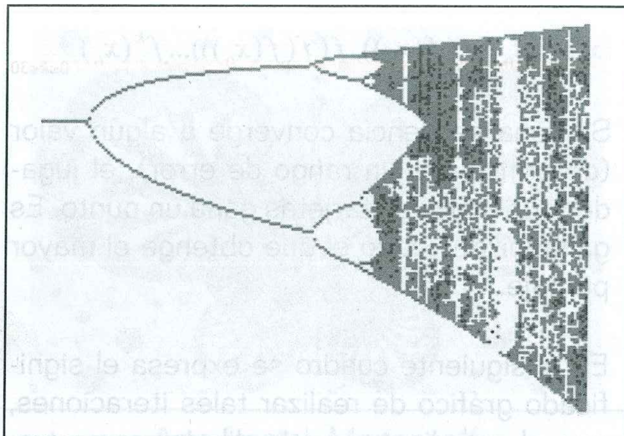
Gráfica Nro. 32. Significado gráfico de iterar la función $x_{n+1} = Nx_n(1 - x_n)$ sobre sí misma, partiendo del punto $x_0 = 0.5$ y tomando $N = 2.75$. Es decir, la órbita de la función en el punto $x_0 = 0.5$, está dada por:

$$\left\langle x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0)))\ldots f^k(x_0)\right\rangle_{0\leq k\leq 30}$$

Para este caso representado, la orbita es convergente.

Los fractales tipo bifurcación son los ejemplos clásicos usados para demostrar que en procesos aparentemente determinísticos, surge el caos. El matemático posee diversas concepciones; la más aceptada, consiste en considerar un sistema dinámico como caótico si es sensible a las condiciones iniciales[48]. La teoría del caos ha tenido amplia aceptación en el mundo científico, y está siendo usada para solucionar problemas, y caracterizar fenómenos aparentemente caóticos, en la economía, la física y en metereología, para mencionar solo algunas de ellas.

48 LORENZ, Edward. La esencia del caos, un campo de conocimiento que se ha convertido en parte importante del mundo que nos rodea. Madrid: Editorial Debate S. A, 1995.

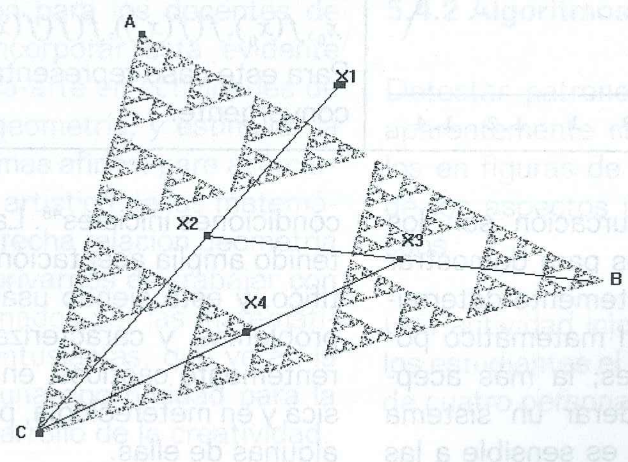


Gráfica Nro. 33 Fractal Bifurcación
Atractor extraño que resume el comportamiento del proceso anterior cuando se varían los parámetros de la función. Ejemplo que evidencia que en procesos aparentemente caóticos, surge el orden.

Una forma sencilla (computacionalmente) de representar gráficamente fractales autosemejantes, es usar el conocido algoritmo, "juego del caos". Su sencillez radica en hallar una sucesión generada recursivamente, en donde, el k-ésimo paso consiste en escoger de manera aleatoria, una de las transformaciones afines del IFS. Simbólicamente, sea $W = \{(X,d), \{T_1, T_2, ..., T_n\}, A\}$, se parte de un punto aleatorio $x_0 \in X$, y se calcula la sucesión:

$$\left\langle x_0, T_{i_1}(x_0), T_{i_2}(T_{i_1}(x_0)), T_{i_3}(T_{i_2}(T_{i_1}(x_0)))... \right\rangle_{1 \le i_k \le n}$$

Al dibujar una gran cantidad de puntos de esta sucesión, en la pantalla del computador, es sorprendente ver una aproximación bastante buena del fractal autosemejante. Dicho algoritmo demuestra que en los procesos aparentemente aleatorios y de naturaleza caótica, puede surgir un orden. (En la siguiente gráfica se explica el algoritmo descrito, para el fractal triángulo de Sierpinski en el plano).



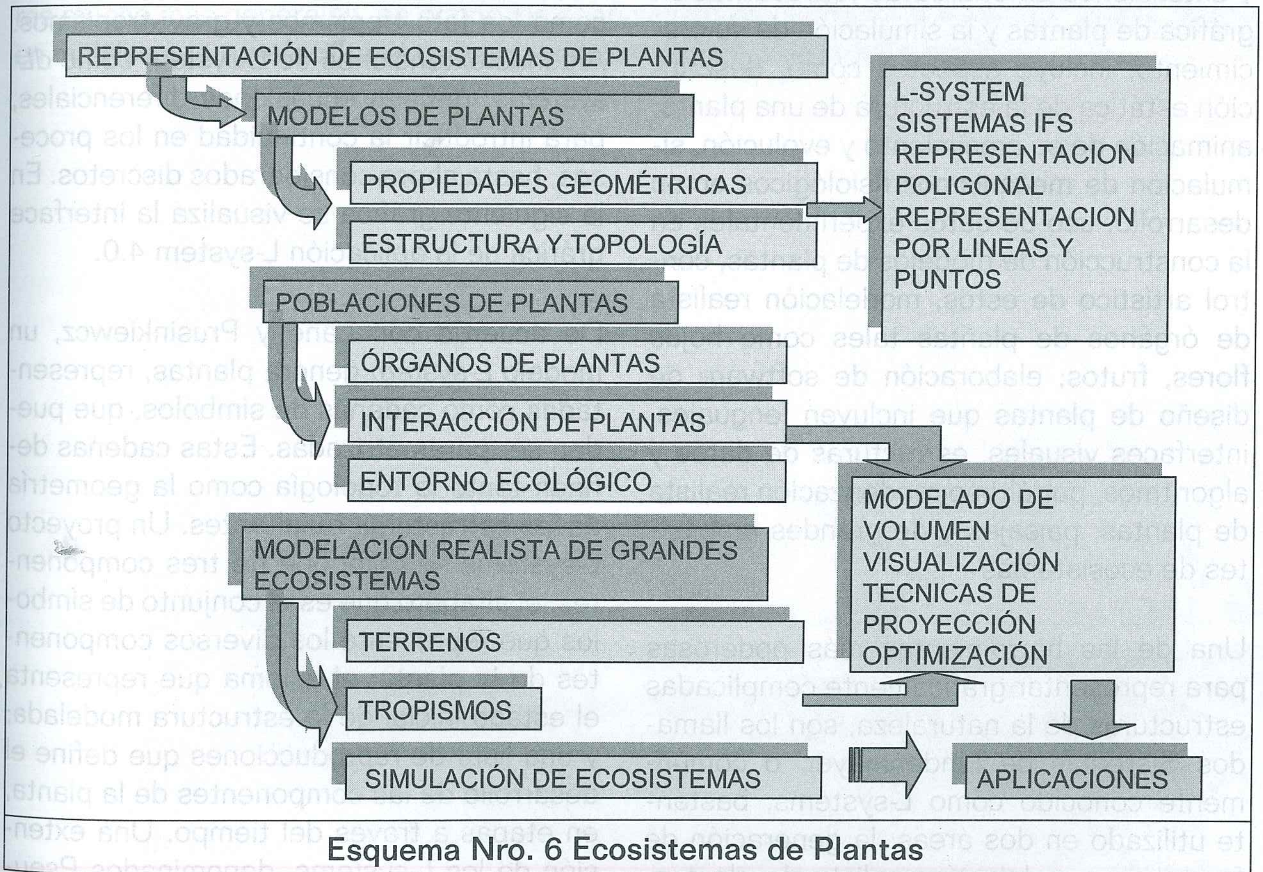
Gráfica Nro. 34 Juego del Caos

5.4.3 Plantas y ecosistemas de plantas

La renderización interactiva de grandes escenas naturales y paisajes, cobra cada vez mayor importancia en computación gráfica. Se aplica en áreas tan diversas como el diseño y embellecimiento de entornos artificiales de jardines y parques, la visualización de espacios diseñados en arquitectura, la interacción constante en escenas naturales realistas de los juegos de computador, los ambientes de realidad virtual y el área de simulación.

La representación de ecosistemas conlleva un grado de complejidad mayor que las representaciones elaboradas con intervención del hombre; es el caso de casas, edificios, ciudades, estructuras viales, ya que la geometría subyacente en las formas de la naturaleza, muchas veces hacen parte de la no diferencial, caracterizada por formas totalmente irregulares, contornos quebrados bastante fragmentados y distribuciones aleatorias.

En las últimas décadas se ha avanzado vertiginosamente en los sistemas de generación de ecosistemas y específicamente de plantas, cada vez con una mayor calidad de realismo, para lo cual se han creado diversos métodos, aplicaciones y lenguajes. En el esquema se presenta una panorámica de la presentación de los aportes de los investigadores en esta área



Esquema Nro. 6 Ecosistemas de Plantas

Modelos simples de plantas.

Algunos aspectos inherentes a las formas y crecimiento de las plantas y su interacción han sido estudiados por Prusinkiewicz y otros, principalmente basados en Sistemas de Lindenmayer conocidos como L-Systems: Los Sistemas de Funciones Iteradas, con Michael Barnsley (Iterated Functions Systems, IFS), algoritmos parametrizados y un conjunto de componentes de Xfront Systems.

Forma y crecimiento de las plantas.

La generación de plantas se considera un problema importante en la Computación Grafica. Según Prusinkiewicz los aspectos y extensiones en el área de representación gráfica de plantas y la simulación de su crecimiento, incluye aspectos como: descripción estática de la estructura de una planta, animación de su crecimiento y evolución, simulación de mecanismos fisiológicos en su desarrollo, uso de datos experimentales en la construcción de modelos de plantas, control artístico de estos, modelación realista de órganos de plantas tales como hojas flores, frutos; elaboración de software de diseño de plantas que incluyen lenguajes, interfaces visuales, estructuras de datos y algoritmos, por último renderización realista de plantas, paisajes y de grandes ambientes de ecosistemas

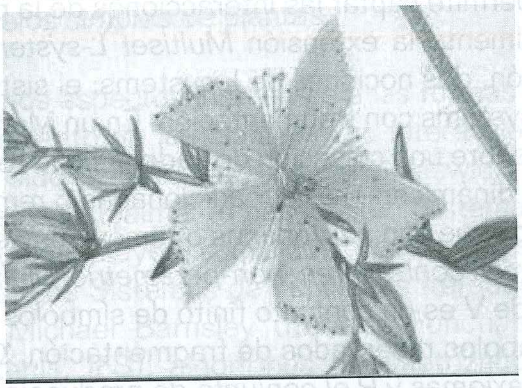
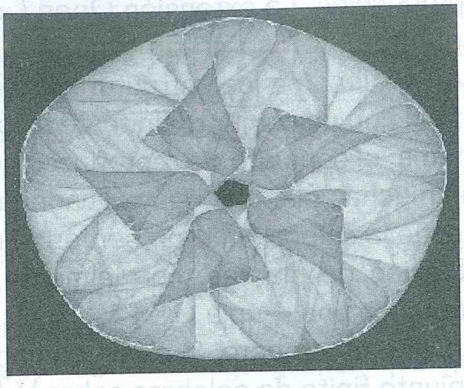
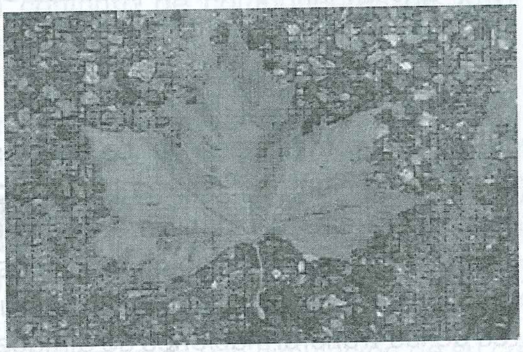
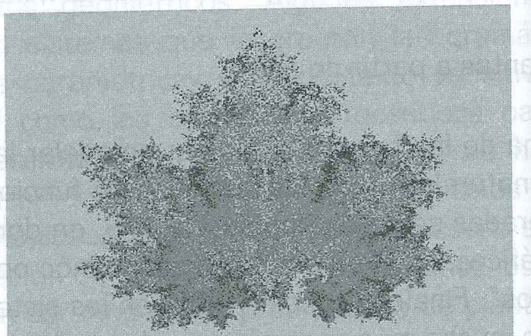
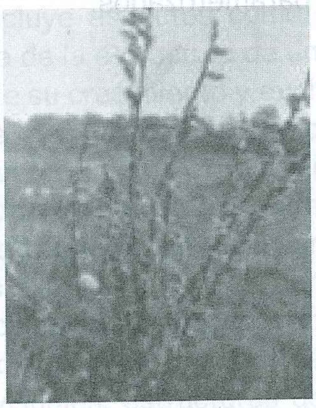
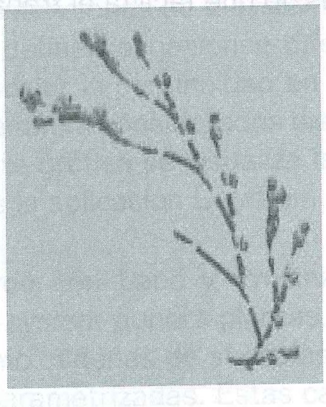
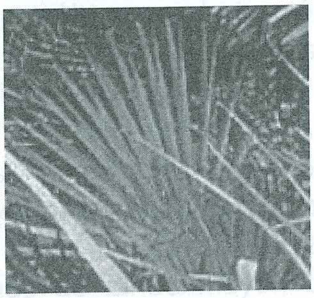
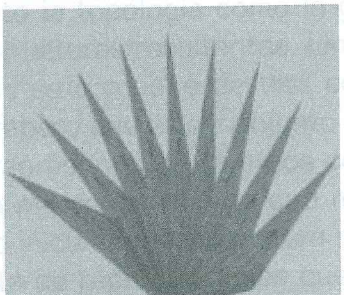
Una de las herramientas más poderosas para representar gráficamente complicadas estructuras de la naturaleza, son los llamados Sistemas de Lindenmayer, o comúnmente conocido como L-systems, bastante utilizado en dos áreas: la generación de fractales y modelación realista de plantas. Según Lintermann y Deussen Los L-systems son sistemas de re-escritura de cadenas, similares a la gramática de Chomsky. A partir de unas palabras llamadas axiomas se deriva una sucesión de letras por aplicación paralela de reglas de re-escritura de cadenas.

Un proceso posterior consiste en que las cadenas generadas sirven como secuencia de comandos para interpretar el comportamiento de la tortuga gráfica que genera datos geométricos. Algunas extensiones son sistemas que incorporan las gramáticas paramétricas y de contexto sensitivo, así como los procesos estocásticos para reescritura de reglas. Estas técnicas han permitido la simulación de mecanismos fisiológicos, como aquellas que regulan la secreción de hormonas. Adicionalmente, pueden ser modeladas propiedades de plantas como los foto-tropismos y gravi-tropismos. Algunas extensiones de *L-system* como *dL-systems*, definen ecuaciones diferenciales, para introducir la continuidad en los procesos, hasta ahora considerados discretos. En la siguiente gráfica se visualiza la interface gráfica de la aplicación L-system 4.0.

De acuerdo con Lane y Prusinkiewcz, un modelo *L-system* genera plantas, representadas como cadenas de símbolos, que pueden ser parametrizadas. Estas cadenas definen tanto la topología como la geometría de las estructuras resultantes. Un proyecto L-systems se compone de tres componentes: el alfabeto que es el conjunto de símbolos que representa los diversos componentes de la planta; el axioma que representa el estado inicial de la estructura modelada; y una lista de reproducciones que define el desarrollo de las componentes de la planta, en etapas a través del tiempo. Una extensión de los *L-systems*, denominados *Pseudo-Lsystems* hace posible la re-escritura de dos o más símbolos usando una sola regla de reproducción. La extensión *Open L-systems* permite captar las interacciones de la planta capturada, con su entorno natural. Adicionalmente la extensión *Multiset L-systemsh*, unifica y extiende a las estructuras de ramificación, dos nociones de L-systems: el sistema evolutivo, con un conjunto finito de axiomas y L-systems con fragmentación. En un Multiset L-systems, el conjunto de reproducciones opera sobre una colección de cadenas que representan muchas plantas, nuevas cadenas pueden dinámicamente ser adicionadas o removidas desde la colección, representando organismos que son adicionados o removidos desde la población de plantas. Formalmente un sistema: *context-free non-parametric Multiset L-systems* es una 4-upla $G = [V, \%, \Omega, P]$, donde V es un conjunto finito de símbolos que constituyen el alfabeto, % es un conjunto de símbolos reservados de fragmentación, Ω es un conjunto finito de palabras sobre V, *llamados axiomas y P el conjunto de producciones.*

Plantas a partir de IFS's

Una de las herramientas para modelar las estructuras tipo ramificación de los objetos de la naturaleza, son los sistemas de funciones Iteradas. La noción de Sistema de funciones iteradas se ha extendido a **P-IFS**, en donde se incorpora la aleatoriedad para generar los gráficos, empleando la representación por puntos y el algoritmo conocido como "juego del caos". Finalmente los **R-IFS** son los sistemas de funciones iteradas recurrentes, estructuras mucho más generales, en donde los coeficientes de las transformaciones se almacenan en matrices, lo que facilita el trabajo al dibujar modelos parametrizados.

	
	
	
	
Objeto de la naturaleza	**Modelado en computador**

Gráfica Nro. 35 Modelación en computador de objetos de la naturaleza

Generación de grandes paisajes naturales

Modelar y renderizar escenas naturales implica diversos problemas. Primero el terreno debe ser modelado y las plantas distribuidas apropiadamente para simular más realismo, reflejando la interacción entre los tipos de plantas y su relación con el entorno. Una escena natural puede consistir en millones de plantas primitivas, renderizadas eficientemente, en donde se incorpora la sutileza de la iluminación en ambientes naturales. Un sistema para desarrollar estos ambientes es descrito más adelante, en donde inicialmente se diseña el terreno usando un editor grafico interactivo; la distribución de las plantas la determina el usuario (como si diseñara un jardín) cuyas plantas individuales están representadas por modelos procesados paramétricamente. La complejidad geométrica de la escena se reduce mediante "muestras aproximadas", en las cuales, plantas, grupos de plantas y plantaciones son aproximadas por objetos representativos, para luego renderizar la escena.

Visualización interactiva de ecosistemas complejos de plantas.

El diseño es útil para visualización de escenas realistas, simulación de renovación de bosques, plantación de pastos, ambientes naturales modificados por el hombre, diseño de ambientes naturales intermedios, como zonas reforestadas luego de un incendio, entre otras. Existen diversas aplicaciones para tales propósitos. Otras áreas han sido invadidas por el empleo, con carácter educativo, de estas aplicaciones de modelación de ecosistemas, para animación por computador, expresión artística, simuladores de vuelo y juegos.

Métodos de modelación e interfaces de usuario para la creación de plantas

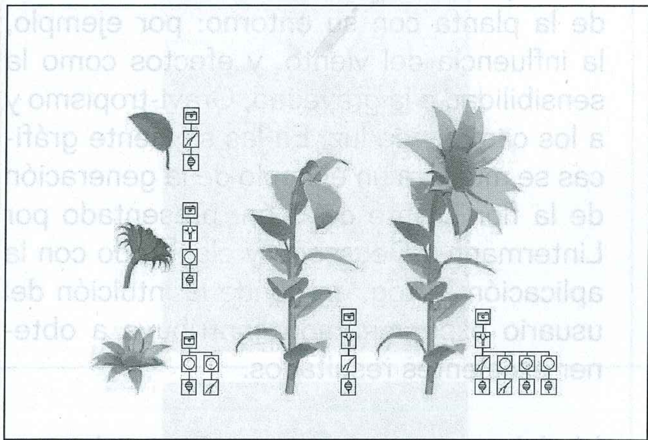
Lintermann y Deussen proponen una aplicación para el diseño de objetos naturales con estructura de ramificación, en donde combinan métodos de modelado para las propiedades geométricas y de estructura, empleando una técnica basada en grafos que contiene iconos para la representación grafica de los componentes. A través de la interface grafica, los usuarios determinan las propiedades geométricas y definen las estructuras de reproducción en el sentido de la formación de la planta. Un aspecto importante lo constituye la incorporación de técnicas de modelados para los órganos de la planta, determinando factores de curvatura axial y colateral y editando formas para el contorno, fijados por el usuario. Adicionalmente se implementan diversas formas de tropismos que simulan la interacción de la planta con su entorno: por ejemplo, la influencia del viento, y efectos como la sensibilidad a la gravedad, Gravi-tropismo y a los campos de luz. En las siguiente gráficas se muestra un ejemplo de la generación de la flor Diente de León, presentado por Lintermann y Deussen[49] y elaborado con la aplicación X-frog, en donde la intuición del usuario experimentado contribuye a obtener excelentes resultados.

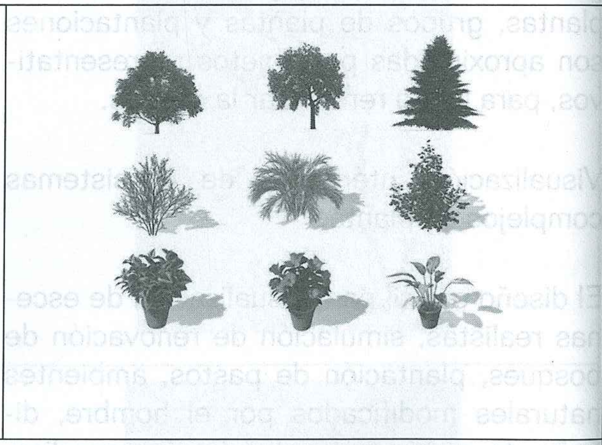
Modelar y rederizar escenas naturales con miles de plantas presenta una diversidad de problemas. Esta propuesta paralela y similar a las descritas hasta ahora, debida a Deussen, Hanrahan, Lintermann, Mech, Parr y Prusinkiewicz, desarrolla un proceso para representación de ecosistemas; allá

49 **LINTERMANN, Bernd and DEUSSEN, Oliver. Interactive modeling of plants. IEEE Computer Graphics and Applications, 1999.**

se modela el terreno y sobre éste se aplican técnicas de distribución de las plantas de manera realistica, reflejando las interacciones entre las plantas y de ellas con su entorno; se emplean modelos geométricos de plantas individuales de acuerdo con sus ubicación dentro del ecosistema; todas deben ser sintetizadas para poblar la escena y, debido a la complejidad de estas, se incorporan técnicas de renderización apropiadas. En el siguiente diagrama se bosqueja la arquitectura de dicho sistema, resaltando en color las etapas en done el usuario interviene.

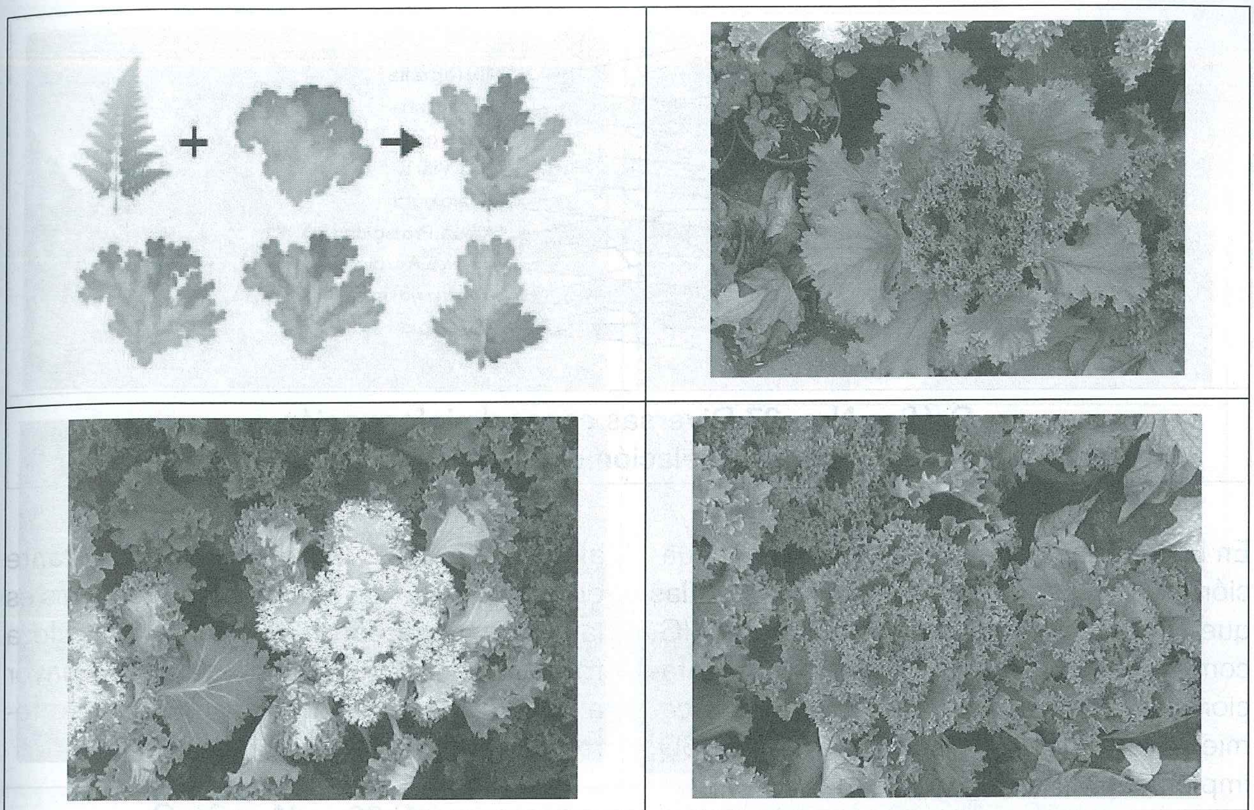
La modelación y renderizacion de grandes escenas conllevan diversos problemas por la gran cantidad de información que debe manejarse. Esta área seguirá siendo un campo de investigación permanente muy importante de la computación grafica y su desarrollo se enfatizara en sistemas distribuidos, graficación en tiempo real y en entornos de realidad virtual. La generación individual de plantas, con empleo de estructuras matemáticas de carácter recursivo, constituye una herramienta para obtener mejores resultados en la optimización tanto en velocidad de procesamiento de los datos como en el uso de recursos de memoria. Las técnicas de visualización evolucionan y se adaptan a la complejidad del problema de modelación de los ecosistemas. Muchas técnicas han surgido para tratar de solucionar en parte este problema. Las aplicaciones e interfases de usuario deben explotar el conocimiento intuitivo de los usuarios experimentados, y la interacción usuario-maquina, permitirá crear y simular procesos naturales cada vez más cercanos a la realidad.





Representación de plantas con Xfrog[50]

50 LINTERMANN, Bernd and DEUSSEN, Oliver. Interactive modeling of plants. IEEE Computer Graphics and Applications, 1999.



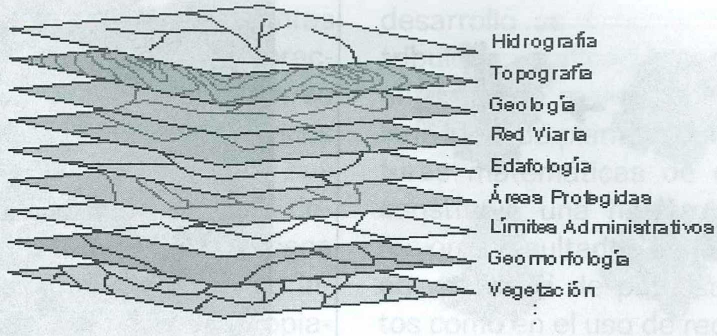
Gráfica Nro. 36 Plantas susceptibles de ser modeladas con fractales V-variables y superfractales

Mecanismos de nivel de detalle LOD han sido desarrollados para reducir la enorme complejidad geométrica, de manera particular para modelar árboles. Un futuro trabajo se podría enfocar a modelos de animación para simular crecimiento de plantas, que es incorporado actualmente basado en técnicas de Key Framing.

5.4.4 Modelación de terrenos

Un nuevo método para la generación de superficies fractales es utilizado por las aplicaciones en modelación y representación de terrenos; una descripción de dicho método, y su justificación como herramienta para representar elementos de la naturaleza, se presenta más adelante.

Debido a la complejidad inherente a los sistemas de información geográfica, es necesario reducir las estructuras espaciales; por ejemplo, en lo referente a los conceptos geométricos, a primitivas sencillas como puntos líneas y polígonos. Esta labor es menos complicada cuando se trata de estructuras de carácter topológico propias de los sistemas de representación geográfica, cuyas relaciones son complicadas de manipular.



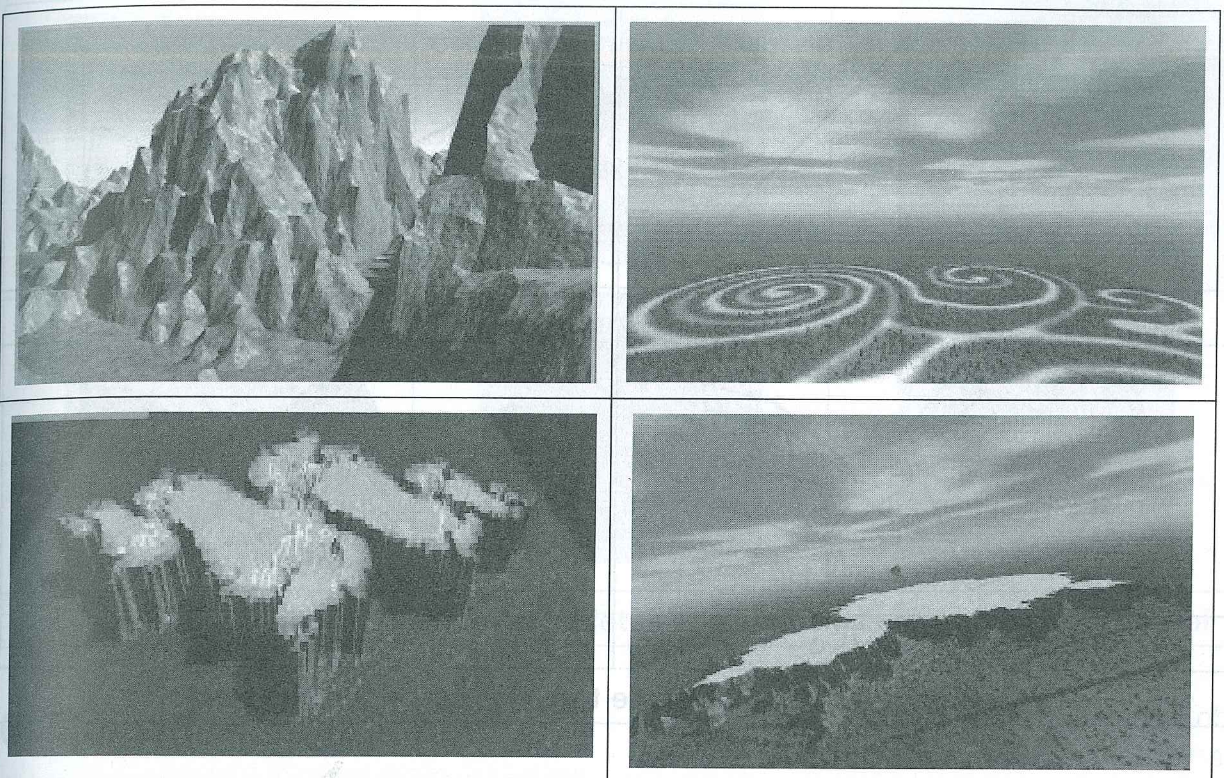
Gráfica Nro. 37 Diversas capas de información para modelación de terrenos

En la aplicación que se describe a continuación, solo se trabajan algunas capas de las que componen la base de datos de un SIG, como la hidrografía, topografía y vegetación, entre otras; por eso es solo un acercamiento a las opciones de visualización 3D, implementada en algunos SIG.

Como se ha visto en la representación geométrica de superficies, casi todas los métodos se basan el la geometría euclidiana, como parte de la geometría diferencial, por ejemplo en el uso de curvas suaves o diferenciables. Pero la geometría que subyace en la naturaleza no obedece a ese carácter diferencial, sino a la fractal, incorporada como una herramienta fundamental para modelar las intrincadas superficies irregulares de las montanas, la complejidad en la formación de las nubes, la naturaleza fragmentada de los contornos de las hojas de una planta, las estructuras de ramificación de los ríos y algunos objetos y fenómenos de la naturaleza, solo mencionando algunas de ellas. Un elemento importante en las aplicaciones que modelan terrenos es la incorporación de técnicas de naturaleza fractal que proporcionan un realismo mayor a la hora de representar las superficies terrestres, las nubes y la vegetación.

Creación de paisajes con VistaPro 4.0

El programa VistaPro 4.0 es un simulador de paisajes interactivos 3D, que usa métodos de representación de los terrenos, basados en superficies fractales como una de sus opciones, para generar superficies fractales de manera aleatoria. Así mismo usa los formatos de gráficos U.S. Geological Survey (USGS), con el cual han sido modelados parte de la topografía de los terrenos de Estados Unidos. También es compatible con el formato de archivo Digital Elavation Model (DEM), un formato de archivo que contiene información para reducción de paisajes digitales tridimensionales.

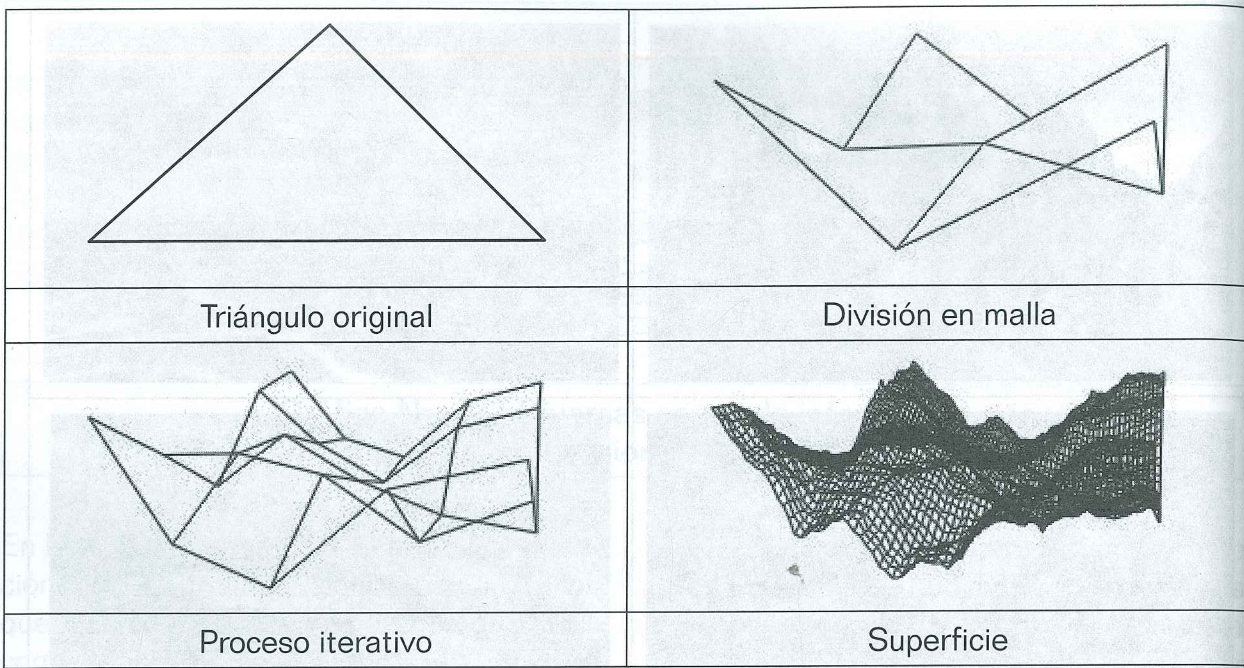


Gráfica Nro. 38 Paisajes virtuales generados con VistaPro 4.0

A continuación se describe en forma general la representación de superficies fractales sobre la cual se basa el programa VistaPro, para la creación de superpies en forma aleatoria, basado en el movimiento browniano y browniano fraccionario.

El movimiento Browniano es aleatorio; es decir, cuando una partícula realiza algún tipo de desplazamiento, está dependiendo de dos factores: el primero, la ubicación en el espacio, y el segundo, el tiempo. Si esta partícula realiza un giro inesperado en un tiempo t inesperado, la trayectoria será un tanto desordenada. Pero si se traza la trayectoria de dicha partícula, se evidenciará una fuerte relación entre esta clase de movimiento y la Geometría Fractal. Este tipo de "desorden" puede ser bien aprovechado en diferentes programas de computación, especialmente el VistaPro, que está basado en este movimiento para la realización de paisajes naturales virtuales, tanto en la generación de los terrenos como el la configuración de las formas irregulares, de los contornos de islas lagos, etc. La generación de superficies fractales se basa así mismo, en el llamado movimiento browniano fraccionario.

Para explicar el algoritmo fractal de representación de una superficie, se parte de un triángulo y, tomando los puntos medios de cada triángulo, se divide en cuatro sub-triángulos. Dichos puntos medios son tomados como nodos que pueden desplazarse aleatoriamente en sentido vertical de acuerdo con una interpolación aplicada a los ejes, con relación a los vértices originales. En la siguiente gráfica se ilustran los pasos básicos para la generación de dicha superficie.



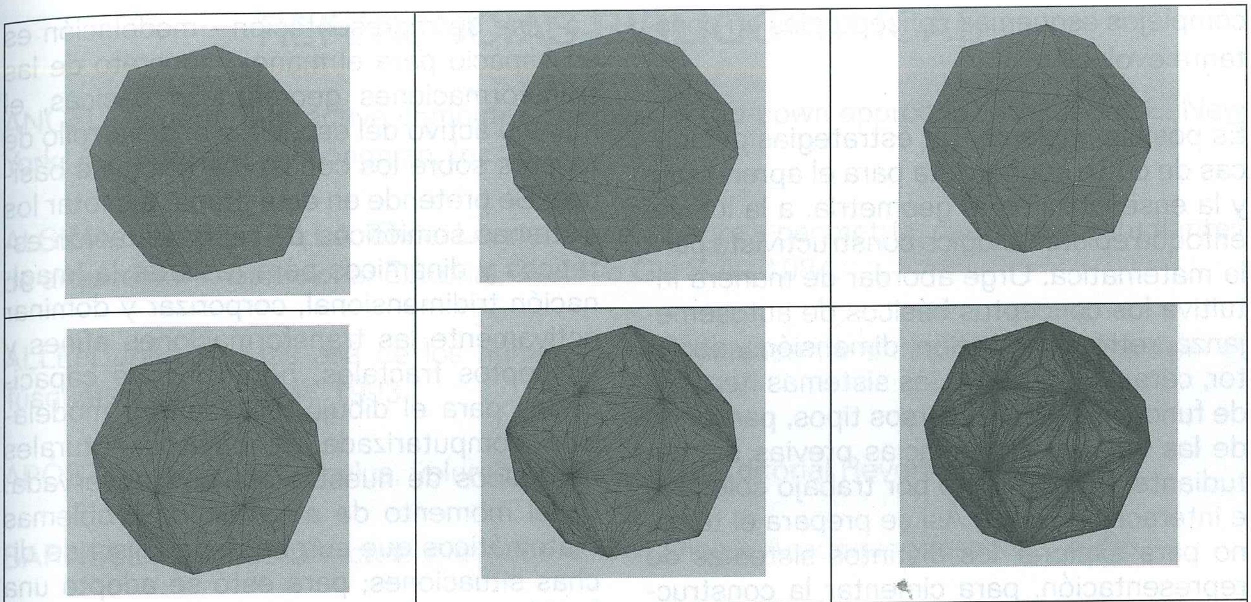
Gráfica Nro. 39 Modelación de terrenos con algoritmo fractal

Los modelos de mallas para representar superficies fractales, generalmente usan mallas triangulares por su simplicidad aunque puede ser extendida a otros polígonos. Un concepto importante, que incluye Vista pro como un elemento modificable, es la dimensión del terreno fractal, que oscila en un valor entre dos y tres. Su interpretación intuitiva corresponde, a mayor irregularidad del terreno, de una dimensión cercana a tres, mientras que si se acerca a dos, el terreno tiende a ser más plano, o regular en el sentido de la superficie.

5.4.5 Representación de objetos 3D en computador

El escenario natural para la representación de objetos del plano o espacio tridimensional es el espacio vectorial real y la colección de transformaciones afines regulares con la composición usual de transformaciones, que tiene estructura de grupo, llamado comúnmente grupo afín. Las afinidades regulares son usadas en métodos de segmentación para reconstrucción de superficies a partir de modelos volumétricos. Dos grupos de métodos han sido trabajados, "Marching Cubes" y "Octrees". Los espacios euclideos, obtenidos al dotar a un espacio vectorial de un producto interior, se constituyen en el contexto para tratar con las propiedades métricas de modelos representados.

Las aplicaciones gráficas disponibles en el medio, para modelación 3D, generalmente usan algunas librerías para gráficos como OpenGL o paquetes de librerías como Java 3D, en lenguajes de programación como Visual Basic, Visual C++ o Java. Para el manejo de las transformaciones bidimensionales y tridimensionales, se usan comúnmente las coordenadas homogéneas, expresadas matricialmente.



Gráfica Nro. 40 Representación de objetos con esquemas de subdivisión fractal

6. Consideraciones finales

Esta investigación se realizó con estudiantes de la asignatura Geometría Fractal, en el programa de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC) y hace parte de una investigación acerca de la didáctica de la geometría fractal de la naturaleza, del grupo de investigación Pirámide, en la línea de investigación en educación matemática.

Con relación a la propuesta didáctica, es importante resaltar que el hecho de acercar al estudiante a su realidad próxima, constituye un factor de motivación que le permite vivenciar experiencias relacionadas con su pensamiento creativo y el desarrollo de su imaginación; además logra sentir admiración y potenciar su capacidad de asombro por los creadores de ésta teoría, al contemplar su obra; así mismo, es el motor que los impulsa a descubrir los secretos de la naturaleza, muchas veces desapercibidos.

Como consecuencia de los resultados obtenidos en esta experiencia didáctica, se pueden mencionar los siguientes aspectos relevantes.

Los sistemas iterados de funciones, la evolución de sus estructuras y el desarrollo de la computación gráfica, constituyen una herramienta ideal para modelizar de manera realista los objetos de la naturaleza, usando el espacio discreto proporcionado por los ambientes de geometría dinámica en computador.

Los ambientes de geometría estática en lápiz y papel y de geometría dinámica, tanto externos (ej: computador), como internos (mente), conforman sistemas semióticos de representación propicios para desarrollar el pensamiento espacial, particularizados al espacio tridimensional (3D), al plano (2D) y a la recta (1D). Manejados sintónicamente (corporizados) y de manera activa, lograrán una serie de representaciones mentales, cada vez mejor estructuradas, base para la construcción de conceptos geométricos en complejos esquemas conceptuales en constante evolución.

Es posible implementar estrategias didácticas de corte cognitivista para el aprendizaje y la enseñanza de la geometría, a la luz del enfoque epistemológico constructivista para la matemática. Urge abordar de manera intuitiva los conceptos básicos de autosemejanza, retroalimentación, dimensión y atractor, característicos de los sistemas iterados de funciones y sus diversos tipos, partiendo de las ideas y experiencias previas del estudiante, básicamente por trabajo colectivo e interacción social. Así se prepara el terreno para explorar los distintos sistemas de representación, para cimentar la construcción formal de los conceptos geométricos, en el contexto de las estructuras matemáticas, generando una permanente reestructuración conceptual, con miras a lograr un aprendizaje significativo de estas nociones básicas de la geometría fractal.

La propuesta metodológica para el aprendizaje de la geometría fractal de la naturaleza planteada en este trabajo, si bien corresponde a un esquema tradicional, se considera una alternativa muy buena para el nivel universitario. Las etapas de exploración, representación - modelación, construcción formal y aplicación, se pueden implementar en cada uno de los temas que se vayan a tratar en esta nueva geometría. No necesariamente se deben desarrollar en forma consecutiva o estricto orden. La etapa de exploración, no solo motiva al estudiante para afrontar los problemas referentes a esta novedosa geometría, sino que le proporciona una nueva forma de mirar el mundo y la vida, le brinda otros enfoques, para oscultar y descubrir los secretos del fascinante mundo natural. Esta visión permite intuir que en muchos fenómenos y objetos de la naturaleza, subyacen los conceptos matemáticos; solo hay que observarlos con el lente adecuado para detectarlos y caracterizarlos.

La fase de representación - modelación es un espacio para el manejo concreto de las transformaciones geométricas básicas, el manejo activo del espacio y el desarrollo de talleres sobre los conceptos fractales básicos. Se pretende en esta etapa: explotar los sistemas semióticos de representación estáticos y dinámicos para rescatar la imaginación tridimensional, corporizar y dominar activamente las transformaciones afines y conceptos fractales, potenciar las capacidades para el dibujo, el diseño y modelación computarizada de objetos naturales abstraídos de nuestra realidad observada. Es el momento de afrontar los problemas matemáticos que surgen del análisis de dichas situaciones; para esto se adopta una heurística de resolución de problemas que pretende desarrollar el pensamiento matemático. Todas las experiencias acumuladas se enriquecen y son la base para detectar regularidades y abstraer similitudes que llevan a consolidar estructuras vinculantes del conocimiento cotidiano con el conocimiento académico

La etapa de construcción formal, permite aprehender los conceptos claves, consolidar nuevas estructuras conceptuales, formalizar ideas contextualizadas en teorías, cimentadas en estructuras matemáticas y unificadas a través de un lenguaje universal. La etapa de las aplicaciones es el espacio ideal para ligar la teoría con la práctica, así como buscar actividades que desarrollen las competencias que busquen la solución de problemas cotidianos para mejorar las condiciones y calidad de vida de las comunidades. La meta de esta fase prioriza el establecimiento de algunos puentes entre el conocimiento científico socializado (conocimiento de frontera) y la tecnología de punta, con el conocimiento académico.[51]

51 Expreso mis agradecimientos a la Comisión Europea, a través del proyecto ALFA-CORDIAL II, quien financió el programa para movilidad de estudiantes de doctorado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANGEL, Edgard. Interactive computer graphics, a top-down approach with OpenGL. New York: Addison Wesley Longman, Inc, 2000.

ALSINA, Claudi y TRILLA, Enric. Lecciones de álgebra y geometría, curso para estudiantes de arquitectura. Barcelona: Editorial Gustavo Gili S.A., 1984.

ALLEN John A. Más allá de los números, meditaciones de un matemático. Barcelona: Tusquets Editores, S.A, 1993.

APÓSTOL, Tom M. Calculus, volumen I. Barcelona: Editorial Reverté, S. A. 1972.

BARNSLEY, Michael. Fractals everywhere. San Diego: Academic Press INC, 1988.

BARNSLEY Michael, HUTCHINSON John E. and STENFLO Orjan. V -variable fractals and superfractals. Canberra: Australian National University, Department of Mathematics 2003.

BARNSLEY Michael. Ergodic theory, fractal tops and colour stealing. Canberra: Australian National University, Department of Mathematics 2003.

BARNSLEY Michael. Theory and applications of fractal tops. Canberra: Australian National University, Department of Mathematics 2005.

BRIGGS, John. Fractals, the patterns of chaos. Discovering a new aesthetic of art, science and nature. New York: Touchstone Simon & Shuster Inc, 1992.

BRIGGS, John y PEAT, F. David. Espejo y reflejo, del caos al orden. Barcelona: Gedisa Editorial, 1994.

CAPRA, Fritjof. La trama de la vida, una perspectiva de los sistemas vivos. Barcelona Editorial Anagrama,1995.

D'AMORE Bruno. Didáctica de la matemática. Bogota: Cooperativa Editorial Magisterio,2006. pp 165-166.

DUVAL, Raymond. Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, 1999.

ERNST, Bruno. El espejo mágico de M. C. Escher. Alemania: Taschen, 1994.

FONT, Vicenç, GODINO Juan D. y D'Amore, Bruno. Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. Barcelona: Universidades de Barcelona, Granada y Bolonia, 2007.

FONT, Vicenç. Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. Barcelona: Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universidad de Barcelona.

GARCÍA, Gloria y otros. Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá: Revolución Educativa, Colombia Aprende, Ministerio de Educación Nacional, 2006.

FONT, Vicenç. Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. Barcelona: Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universidad de Barcelona.

FONT, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en didáctica de las Matemáticas. *Revista EMA*, 7 (2), 127-170.

GUZMÁN Miguel, y otros. Estructuras fractales y sus aplicaciones. Barcelona: Editorial Labor, 1993.

HOFSTADTER, Douglas R. Gödel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle. Barcelona: Tusquets Editores, S.A, 1987.

HUTCHINSON, J. E. Fractals and self-similarity. Indiana: Univ. Math. J. 30 713–749, 1981.

HUTCHINSON, J .E. and RÜSCHENDORF, L. Random fractals and probability metrics Adv. in Appl. Probab. 32 925–947, 2000.

HUTCHINSON J. E. and RÜSCHENDORF L. Selfsimilar fractals and selfsimilar random fractals Progr. Probab. 46 109–123, 2000.

LABORDE Colette. Soft and hard constructions with Cabri: contribution to the learning of mathematics. Bogotá: XVII Encuentro de Geometría, Universidad Pedagógica Nacional, 2006.

LABORDE Colette. Cabri Geometry: una nueva relación con la geometría. Grenoble: Universidad Joseph Fourier, IUFM, 1998.

LAUWERIER, Hans. Fractals. New Jersey: Princeton University Press, 1987.

LEWIN, Roger. Complejidad, el caos como generador del orden. Barcelona: Tusquets Editores, S.A, 1995.

LINTERMANN, Bernd and DEUSSEN, Oliver. Interactive modeling of plants. IEEE Computer Graphics and Applications, 1999.

LORENZ, Edward. La esencia del caos, un campo de conocimiento que se ha convertido en parte importante del mundo que nos rodea. Madrid: Editorial Debate S. A, 1995.

MANDELBROT, Benoit. Los objetos fractales, forma azar y dimensión. Barcelona: Tusquets Editores, S.A, 1984.

MANDELBROT, Benoit. The fractal geometry of nature. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.

MASSOPUST, Peter R. Fractal functions, fractal surfaces y wavelets. San Diego: Academic Press, 1994.

MONROY, O. César. Curvas fractales. México: Alfaomega Grupo Editor S.A., 2002.

MONROY, O. César. Teoría del caos. México: Alfaomega Grupo Editor S.A., 1997.

MORENO, Armella Luis. Argumentación y formalización mediadas por Cabri-Geometry. Bogotá: Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional, 2002.

NOVAK, Joseph y GOWIN, Bob. Aprender a aprender. Barcelona: Editorial Martínez Roca, 1988.

OLIVER, Dick y otros. Fractals graphics for windows. Indianapolis: SAMS Publishing, 1994.

PEITGEN, Heinz-Otto y otros. Fractals for the classroom, part one, introduction to fractals and chaos. New York: Springer-Verlang, 1992.

PEITGEN, Heinz-Otto y otros. Fractals for the classroom, strategic activities volume Two. New York: Springer-Verlang, 1992.

PEITGEN, Heinz-Otto y RICHTER, P. H. The beauty of fractals. Berlín: Springer-Verlag, 1986.

PEITGEN, Heinz-Otto, JURGENS, Hartmut y SAUPE, Dietmar. Chaos ans fractals, new frontiers of science. New York: Spinger-Verlag, 1992.

PRUSINKIEWICZ, P., AND LINDENMAYER, A. The algorithmic beauty of plants. New York: Springer-Verlag, 1990.

PRUSINKIEWICZ, P., AND HANAN, J. L-systems: From formalism to programming languages. In *Lindenmayer systems: Impacts on theoretical computer science, computer graphics, and developmental biology.* , Berlin: Eds. Springer-Verlag, 1992, pp. 193–211.

SABOGAL Sonia. Autosemejanza en Topología. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, Escuela de Matemáticas., 1998.

SCHROEDER, Manfred R. Fractals, chaos, power laws. Minutes from an infinite paradise. New York: W. H. Freeman and Company. 1996.

SUÁREZ, S. Publio. El aprendizaje de la geometría fractal, Tesis meritoria de magíster en educación, Universidad Pedagógica Nacional. Dirigida por Novoa, P. Alberto. Tunja: Publicaciones Universitarias, 1996.

TYLER, Dense. Fractal Design painter 3.1. Indianapolis: SAMS Publishing, 1995.

VASCO, Carlos E. Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas. Volumen I y II Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, MEN, 1992.

VASCO, Carlos E. Didáctica de las Matemáticas. Las matemáticas: ¿Arte o ciencia?. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. 2006.

WADSTRÖMER, Niclas. Coding of fractal binary images with contractive set mappings composed of affine transformations. Linköping: Linköping University, 2001.

WOLFRAM, Stephen. Mathematica, a system for doing mathematics by computer. Chicago: Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

WEGNER, Tim y TYLER, Bert. El mundo de los fractales, convierta los números en una realidad fractal. Madrid: Ediciones Anaya Multimedia S.A., 1995.