

# La Noción de Función

## Como Dependencia en el Pensamiento Variacional

Jenny Rocío Herrera Tovar

Estudiante Maestría en Educación  
Grupo de Investigación PIRÁMIDE  
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia  
rochiherr@yahoo.es

## Resumen

Este artículo  
tura gene  
para la co  
como depen  
a estudian  
no de Edu  
fundament  
sión en ma  
Romero y  
Fandiño (2  
rrículo de  
objeto de  
cárate y D  
Espitia (19  
Nacional (C  
delos elem  
proporcion  
situacione  
estudiante  
esta noción

## Palabras

Función, c  
temas de  
aprendiza

## Resumen

Este artículo presenta el diseño y la estructura general de una propuesta didáctica para la comprensión de noción de función como dependencia entre variables, dirigida a estudiantes de los grados sexto a noveno de Educación Básica. La propuesta se fundamenta en la teoría sobre la comprensión en matemáticas de Sierpinska (1994); Romero y Rico (1999); D'Amore, Godino y Fandiño (2008), los organizadores del currículo de Rico (1997), y la función como objeto de enseñanza y aprendizaje de Azcárate y Deulofeu (1996); García, Serrano y Espitia (1997) y el Ministerio de Educación Nacional (2004). Además, vincula los modelos elementales de función lineal, afín, de proporcionalidad inversa y cuadrática con situaciones en contexto para aproximar al estudiante a la comprensión significativa de esta noción.

### Palabras Clave:

Función, dependencia entre variables, sistemas de representación, situaciones de aprendizaje contextualizadas.

## Abstract

This article presents the design and the general structure of a didactic proposal for the understanding of notion of function like dependence among variables, directed students of the grades sixth at ninth of Basic Education. The proposal is based in the theory about the understanding in mathematics of Sierpinska (1994), Romero and Rico (1999); D' Amore, Godino and Fandiño (2008), the organizers of the curriculum of Rico (1997), and the function like teaching object and learning of Azcárate and Deulofeu (1996); García, Serrano y Espitia (1997) y el Ministerio de Educación Nacional (2004). Also it links the Lineal, Kindred, of inverse proportionality and Quadratic elementary models of function, with situations in context to approach the student to the significant understanding of this notion.

### Key Words:

Function, dependence among variables, representation systems, learning situations in context.

## Introducción

El objetivo de este artículo es presentar el diseño de una propuesta de enseñanza del concepto de función como dependencia entre variables para los grados 6° a 9° de Educación Básica Secundaria, en el marco del pensamiento variacional propuesto en los Lineamientos Curriculares del área de Matemáticas en Colombia (1998), los Estándares Básicos de Competencias (2006) y soportada por resultados de investigaciones de la comunidad de Educación Matemática nacional (MEN, 2004; García, Serrano y Espitia, 1997), e internacional (Rico, 1997; Azcárate y Deulofeu, 1996; Sierpinska, 1994; Romero y Rico, 1999; D'Amore, Godino y Fandiño, 2008) sobre los procesos de comprensión de conceptos matemáticos y desarrollo del pensamiento variacional.

El acercamiento a la comprensión de la función desde la perspectiva variacional surge de reflexiones al interior de las comunidades científicas de Educación Matemática que manifiestan la necesidad de desarrollar nuevas formas de pensamiento que permitan interpretar, comprender, describir, explicar, predecir y controlar el mundo cambiante en que vivimos. Es por esto, que en los lineamientos curriculares para el área de matemáticas (1998), se plantea como propósito central de la

educación matemática de los niveles de básica y media contribuir al desarrollo del pensamiento matemático a partir del trabajo con situaciones problemáticas provenientes del contexto sociocultural, de otras ciencias o de las mismas matemáticas. Dentro de los tipos de pensamiento se hace alusión directa al "Pensamiento variacional" - necesario para la comprensión de los conceptos del Cálculo- como una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de cambio y que sea capaz de modelarlos.

Asociado a este pensamiento es que se hace fundamental introducir el concepto de función como dependencia entre variables, y como objeto matemático de modelización de fenómenos que expresan procesos de cambio, en donde intervienen magnitudes que varían. La comprensión de la función con este enfoque no es posible con el tratamiento predominante en las clases de matemáticas, en donde se privilegia la definición conjuntista de función institucionalizada en el siglo XIX, como correspondencia unívoca entre conjuntos, en la que se puso de relieve caracterizaciones más generales, rigurosas y precisas del concepto, perdiendo su carácter dinámico para convertirse en algo puramente estático. Como ratifican Azcárate y Deulofeu (1996), en esta última generalización del concepto se pierden muchos de los atributos que tenían

las definiciones de Euler, Fourier y Cauchy) como continuación de otro tema de los rítmicos. generar una función.

La inversión del paradigma de la naturaleza

La Pr

La Didáctica del campo de la matemática dio lugar a la didáctica de la matemática, identificando dichos campos que producen los conocimientos. La comprensión afectada por los conocimientos matemáticos son los conocimientos de la sociedad, enseñanza de matemáticas, aprendizaje y gestión.

De esto se deduce que la dificultad de los conceptos matemáticos es la noción

La función matemática es un concepto real y es un concepto abstracto. La función matemática es un concepto abstracto que se da en su evolución.



las definiciones clásicas (Jean Bernoulli, Euler, Fourier, Lagrange, Dirichlet, Cauchy) como son la idea de variación, de continuidad, de la variable como parámetro temporal, de dependencia, característicos de la mayoría de problemas que generaron la necesidad del concepto de función.

La investigación se inscribe en el paradigma cualitativo, por cuanto se acepta la naturaleza socialmente construida de

la clase de matemáticas, los condicionamientos de las situaciones que dan forma a la investigación y la relación entre los investigadores y el problema investigado (Denzin y Liconl, 1994, citado en García, Castiblanco y Vergel, 2005).

A continuación se reportan algunos aspectos de la investigación mencionada y realizada en el proyecto de grado presentado por el autor en la Maestría de Educación de la UPTC. (Herrera, 2009).

## La Problemática y el Proceso Investigativo

La Didáctica de la Matemática como campo de investigación científica, estudia los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tratando de identificar los factores que condicionan dichos procesos y de construir teorías que proporcionen un control práctico sobre los sistemas didácticos (Ruiz, 1993). La comprensión de los conceptos se ve afectada principalmente por tres componentes esenciales que intervienen necesariamente en el ámbito escolar; estos son: los conocimientos matemáticos, que la sociedad valora y considera deben ser enseñados y aprendidos en su sistema de enseñanza, los alumnos o sujetos que aprenden y los profesores encargados de gestionar la enseñanza.

De estos componentes emergen factores que dificultan la comprensión de algunos conceptos matemáticos, que son complejos por su naturaleza, tal es el caso de la noción de función.

La función surge en el contexto variacional mediante la solución de problemas reales en donde la variación y el cambio son factores importantes para la construcción del concepto, pero usualmente se da un tratamiento didáctico inverso a su evolución histórica; "la idea más pri-

mitiva de función estaba contenida en las nociones de cambio y de relación entre magnitudes variables. No obstante, durante mucho tiempo, los matemáticos consideraban a los entes matemáticos como estáticos y a las magnitudes físicas como variables." (Ruiz, 1993). Se introduce su faceta formal y estática de la etapa final de su institucionalización como correspondencia unívoca entre elementos de conjuntos. Además, el tratamiento estático de las variables constituye un obstáculo didáctico para las nociones de variable, variabilidad y dependencia entre variables, elementos indispensables en el pensamiento variacional.

Según Azcárate y Deulofeu (1996), el concepto de función además de la dificultad para su definición ofrece la complejidad de su simbolismo y de su representación, así como también se hace difícil su interpretación por la diversidad de problemas que la involucran y los modelos matemáticos que representa.

De otra parte, la metodología utilizada por los docentes da mayor importancia a los algoritmos y procedimientos mecánicos, y poco se tienen en cuenta los procesos cognitivos necesarios para la construcción de los conceptos. Además,

cuando es enseñada los profesores se remiten a una mera enseñanza expositiva, a la ejercitación de cálculos y a la resolución de problemas rutinarios. Por lo que las aplicaciones no son realmente importantes y los alumnos finalizan los grados sin adquirir una competencia real para llevar a cabo un aprendizaje significativo. (Garzón y García, 2009).

Esta forma de enseñanza, genera obstáculos cognitivos que conllevan a errores, dificultades y aprendizajes memorísticos desprovistos de significado. Se practica desde un instrumentalismo tal, que privilegia el tratamiento mecánico del concepto, limitado a la elaboración de tablas, gráficas y esquemas algebraicos, lo cual no asegura que en el proceso se esté construyendo un concepto de función con sentido.

A partir de estos planteamientos surge la siguiente pregunta: ¿Cómo diseñar una propuesta de enseñanza que permita la construcción significativa de la noción de función como dependencia entre variables?

Para dar respuesta a este interrogante se planteó como objetivo general de la investigación, diseñar una propuesta de enseñanza del concepto de función como dependencia entre variables, mediante situaciones de aprendizaje en contextos con significado. Para el logro del objetivo general se formularon los siguientes objetivos específicos: se estudió el análisis epistemológico de la noción de función, encontrando los momentos históricos de la misma, desde la identificación de algunas regularidades en fenómenos sujetos al cambio hasta la función como terna (Tabla 1). Se indagó sobre errores y dificultades de los estudiantes en relación con el aprendizaje de la noción de función, a la par, se consultó sobre los antecedentes investigativos de carácter didáctico para la enseñanza de la función, planteando una propuesta didáctica para acercar a la comprensión de función.

Para el diseño de la propuesta didáctica se hizo necesario el estudio preliminar de los análisis: epistemológico, fenomenológico, cognitivo y didáctico, del fenómeno de la enseñanza y aprendizaje del concepto de función en Educación Básica, por lo tanto se utilizó la Investigación Documental; la cual constituye una estrategia donde se observa y reflexiona sistemáticamente sobre realidades (teóricas o no) usando para ello diferentes tipos de documentos. Indaga, interpreta, presenta datos e informaciones sobre un tema determinado de cualquier ciencia, utilizando para ello, una metodología de análisis; teniendo como finalidad obtener resultados que pudiesen ser base para el desarrollo de la creación científica (Briones, 1992). En el campo de la Educación Matemática se ubica en el tipo de investigación de "Tecnología Didáctica", que se propone poner a punto materiales y recursos, usando los conocimientos científicos disponibles, para mejorar la eficacia de la instrucción matemática (Godino, 1998).

**El proceso investigativo se llevó a cabo en las siguientes fases:**

- Fase teórica: Construcción de un marco referencial teórico en torno a los organizadores de currículo propuestos por Rico (1997).
- Fase de planificación didáctica: Diseño de la propuesta didáctica teniendo en cuenta la estructura, las secuencias didácticas y las situaciones de aprendizaje y la construcción de las categorías de análisis a priori.

## Referentes Teóricos

El trabajo de investigación gira en torno al concepto de función como dependencia entre variables, fundamentándose principalmente de los organizadores de currículo planteados por Rico (1997), los cuales, son conocimientos que se utilizan para secuenciar los contenidos, diseñar las actividades, preparar la eva-

luación, entre otros, además, desempeñan un papel fundamental para la construcción de las situaciones de aprendizaje en cada una de las secuencias. Rico, propone utilizar los siguientes organizadores de currículo: el marco legal, la estructura de los contenidos, el análisis fenomenológico, las representaciones y modelos, los errores y dificultades, los materiales y recursos, las concepciones epistemológicas y la bibliografía básica.

## Marco legal

Esta propuesta está enmarcada dentro de

## Estructura de los contenidos

Los contenidos que se tienen en cuenta para el diseño de la propuesta se presentan en el siguiente mapa conceptual:

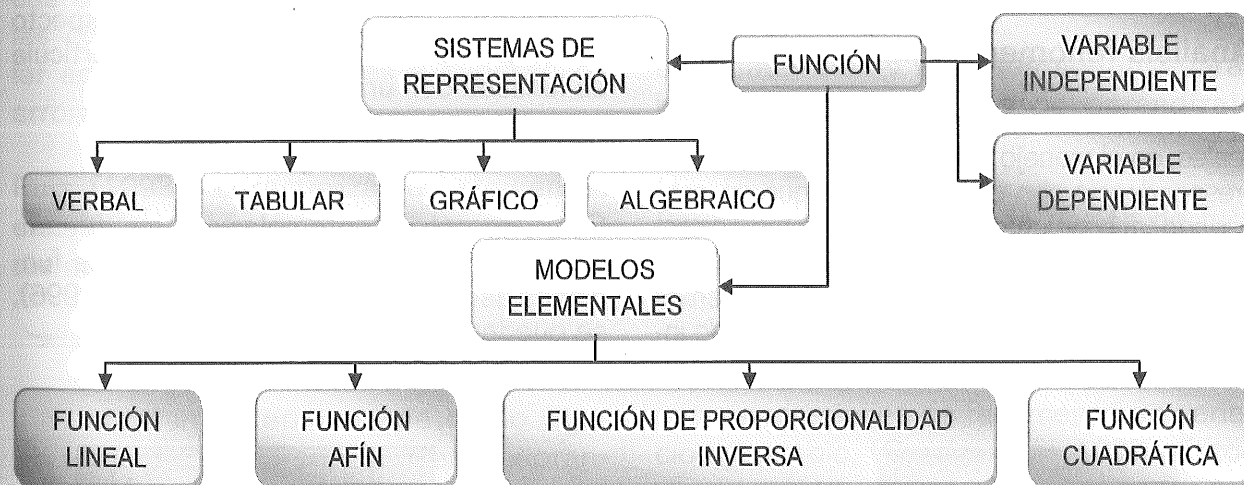


Figura 1. Contenidos para la propuesta didáctica

La alternativa que se presenta, permite preparar a los alumnos para tratar la noción de función como dependencia entre variables; inicialmente es de vital importancia verificar en que grado de conocimientos se encuentran los estudiantes con conceptos básicos como magnitud, variable, variable independiente y dependiente para luego identificar los sistemas de representación (gráfica, tabla, verbal y algebraica), utilizándolos simultáneamente

la Ley General de la Educación (1994), los Lineamientos Curriculares del área de matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de competencias en Matemáticas (2006), cuyo reto es potenciar el pensamiento matemático mediante el desarrollo de las competencias matemáticas, las cuales no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más complejos (MEN, 2006).

y haciendo traducción entre estos.

En esta propuesta se toma la noción de función como dependencia de Borrego (2001): "...Una función es una ley que relaciona dos magnitudes numéricas (llamadas variables) de forma unívoca, es decir, que a cada valor de la primera magnitud (llamada variable independiente) le hace corresponder un valor y sólo uno de la segunda magnitud (llamada va-

riable dependiente). Suele decirse que la segunda magnitud es función de la primera...”

Igualmente, se asumen las teorías sobre comprensión y competencias matemáticas de Sierpinska (1994); Romero y Rico (1999), D'Amore, Godino y Fandiño (2008). Desde esta perspectiva, se tienen en cuenta dos dimensiones de la comprensión significativa de las matemáticas: por una parte, el “aprendizaje con significado” de los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, estructuras, proposiciones, axiomas, teoremas...), que consiste en la construcción y apropiación de los significados asociados, los cuales se construyen a través de los sistemas de representación; y por otra, el “aprendizaje con sentido”, que hace referencia al uso de los objetos matemáticos en contextos con significado, en los cuales se les da sentido, lo cual tiene que ver con las competencias matemáticas. (Medina, 2009).

## Análisis fenomenológico

Generalmente se hace uso de las funciones reales, en el manejo de cifras numéricas, en correspondencia con otra, debido a que se está usando subconjuntos de los números reales. Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver problemas de la vida diaria, problemas de finanzas, de economía, de estadística, de in-

geniería, de medicina, de química y física, de astronomía, de geología, y de cualquier área social donde haya que relacionar variables.

Las funciones lineal y afín pueden generarse en situaciones que se relacionan magnitudes como la altura de un árbol y la longitud de su sombra en una hora, en un lugar determinado (f), o en la relación funcional que se define entre los precios de un determinado número de fotocopias de un mismo ejemplar (g).

El estudio de las funciones cuadráticas resulta de interés, no sólo en matemática, sino también en física y en otras áreas del conocimiento, como: la trayectoria de una pelota lanzada al aire, la trayectoria que describe un río al caer desde lo alto de una montaña, la forma que toma una cuerda floja sobre la cual se desplaza un equilibrista, el recorrido desde el origen, con respecto al tiempo transcurrido, cuando una partícula es lanzada con una velocidad inicial.

## Representaciones y modelos

Otro aspecto a contemplar son los diferentes sistemas de representación de las funciones así como lo expresa Azcárate (1996), se pueden considerar los siguientes:

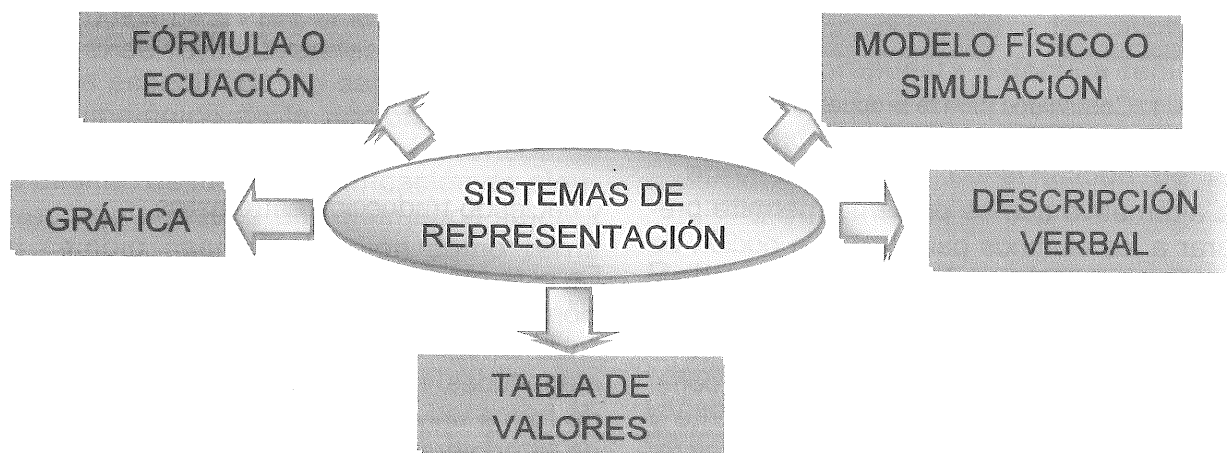


Figura 2. Sistemas de representación

Cada una de estas representaciones permite expresar un fenómeno de cambio, una dependencia entre variables. El aprendizaje de las funciones pasa por un conocimiento en cada uno de estos lenguajes de representación, es decir, por la adquisición de la capacidad de leer e interpretar cada uno de ellos y posteriormente para traducir de uno a otro.

### Errores y dificultades en el aprendizaje del concepto de función

Es importante que el profesor conozca los resultados de las investigaciones realizadas en torno a las dificultades de comprensión durante la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos correspondientes, para contemplarlas como antecedentes y poder formular actividades tendientes a superar los errores y dificultades.

Ruiz (1993), caracteriza los siguientes errores, después de analizar las respuestas de los estudiantes a un cuestionario:

- Los alumnos que responden mediante procedimientos de simulación, intentan determinar, de modo figurativo, cómo varía el área, ignorando qué varía en esta situación (qué variables  $x$  e  $y$  son las pertinentes).
- Los alumnos, en gran parte, no modelizan la variación de la situación (en contexto geométrico) de forma directa a través de la simbolización gráfica, es decir, no logran determinar las variables pertinentes de la situación y observar el cambio de modo global a través del gráfico.
- Los alumnos, en general, no dis-

crimanan entre las variables que representan magnitudes físicas y variables numéricas. El paso de la fórmula, establecida entre magnitudes, a la función, establecida entre variables estrictamente numéricas, puede estar impedido por un esquema de pensamiento inconsciente.

- En nuestros alumnos se ha podido generar un obstáculo en cuanto a las fórmulas algebraicas y al álgebra en general, como el conjunto de técnicas eficaces para resolver "problemas de incógnitas", ya que elimina el sentido de variable, elemento esencial para la constitución de la función.

### Materiales y recursos

Los materiales y recursos son inseparables de las actividades de aprendizaje que se realizan en el aula.

Para la comprensión de la noción de función como expresión de dependencia entre variables, interesa el aspecto semántico de la dependencia expresada en representaciones gráficas, tabulares y verbales como expresiones de fenómenos de variación y cambio, (García, et al. 1997). Estos sistemas de representación se pueden considerar recursos para la enseñanza, igualmente las nuevas tecnologías audiovisuales e informáticas, las cuales, ampliaron las posibilidades de representación de los fenómenos de variación y para poder pasar de manera versátil de un sistema de representación a otro (MEN, 2004).

Por tal razón, en las Orientaciones para el profesor y en las Actividades para los alumnos, se plantean situaciones en donde se utilizan los sistemas de represen-



tación tendientes a la comprensión de los conceptos. El programa DERIVE es un importante recurso en el tratamiento de la variabilidad en familias de funciones.

## Concepciones epistemológicas

Para profundizar en los significados asociados e identificar los elementos constitutivos de la noción de función, este estudio se ha apoyado en las concepciones epistemológicas identificadas en la génesis y evolución histórica de la noción de función, por Ruiz (1993):

CONCEPCIONES EPISTEMOLÓGICAS	SITUACIONES	INVARIANTES	REPRESENTACIONES	MOMENTO HISTÓRICO
Identificación de algunas regularidades en fenómenos sujetos al cambio	Todas las ligadas a los fenómenos naturales donde intervienen magnitudes físicas variables.	Establecimiento de regularidades entre las relaciones de causa - efecto.	Medidas de cantidades. Tablas.	Desde la matemática prehelénica, perdurando largo tiempo.
Razón o proporción	Todas las ligadas a las magnitudes físicas y en especial en dominios tales como la geometría o la astronomía.	Relaciones de comensurabilidad entre magnitudes homogéneas.	Las proporciones en un principio se expresaban "retóricamente" las relaciones establecidas (por ej. El teorema de Tales), pasando posteriormente a expresiones como: $a : b :: c : d$	Desde la matemática helénica, perdurando con matemáticos como Oresme y Galileo.
Gráfica (Visión sintética)	Todas las ligadas a las magnitudes físicas: movimiento, luz, calor, etc. en las que se intentaba representar gráficamente tanto la variación como la dependencia entre dichas magnitudes.	Proporcionalidad entre magnitudes. Relación de dependencia cualitativa representada por medio de una figura que intenta describir la cantidad de una determinada cantidad en relación con la otra de la cual depende.	Se usaban términos específicos: "Formas, latitud, longitud". Se representaba la dependencia por medio de gráficos que adquirirían su significado de forma global (sintética).	Comenzó en las escuelas de Oxford y París en el siglo XIV y su representante más significativo fue Oresme.
Curva (analítico - geométrica)	Se trataba de buscar un método de expresión de las relaciones numéricas entre determinadas propiedades de objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de las "coordenadas".	"Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y en el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva". (Descartes). Representación analítica.	Ejes cartesianos, coordenadas, representación algebraica.	Surgió a través de los trabajos de Descartes y Fermat (siglo XVI-XVII) y permanece en la matemática.

Tabla 1. Concepciones epistemológicas de la noción de función

CONCEPCIONES EPISTEMOLÓGICAS	SITUACIONES	INVARIANTES	REPRESENTACIONES	MOMENTO HISTÓRICO
------------------------------	-------------	-------------	------------------	-------------------

Tabla 1. Concepciones epistemológicas de la noción de función.

CONCEPCIONES EPISTEMOLÓGICAS	SITUACIONES	INVARIANTES	REPRESENTACIONES	MOMENTO HISTÓRICO
Expresión analítica	Tanto intramatemáticas como extramatemáticas. Los problemas de la Astronomía y la Física (Mecánica): el estudio del movimiento curvilíneo y de las fuerzas que afectan el movimiento. Los problemas del Cálculo Infinitesimal se intentaron resolver con aproximaciones "físicas" — teoría de las fluxiones de Newton.	Se identifican las cantidades variables con las expresiones analíticas: "Una función de una cantidad es una expresión analítica compuesta de cualquier manera que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes". Pero permanece aún la idea de asignar la variación a las cantidades.	Aparecen términos muy próximos tales como fuentes y fluxiones. En 1673 Leibniz introduce el término función representándolo con $\varphi(x)$ . Euler, más tarde, lo generalizará como una expresión analítica (Desarrollo en serie): $(x) = a_0 + ax + az^2 + az^3 + \dots + a_n z^n + \dots$	Comienza con los estudios de Descartes y Fermat, prosigue con los trabajos mecanicistas y geométricos de Newton y Leibniz (siglo XVII) en los inicios del Cálculo Infinitesimal y continúa con los de Bernoulli, Lagrange y Euler (siglo XVII - XVIII) creando poco a poco una disciplina autónoma: El Análisis Matemático.
Correspondencia arbitraria: Aplicación	Continúan surgiendo de las conexiones entre la Física y la Matemática, siendo muy significativo el problema de la cuerda vibrante, a partir del cual se tendrán necesidad de crear una noción más general de función. Se tratan también los problemas existentes respecto a la continuidad de funciones.	Se llega a la noción de correspondencia arbitraria: "Si una variable $y$ está relacionada con otra variable $x$ de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a $x$ hay una regla según la cual queda determinado un único valor de $y$ , se dice que $y$ es una función de la variable independiente $x$ ".	El término función se corresponde con la expresión $f(x)$ , o bien con $y$ ; se representará más tarde a partir de la introducción de la teoría de conjuntos y el estructuralismo bourbakista como $f: x \rightarrow y$ o bien $x \rightarrow f(x)$ . Las representaciones gráficas siguen utilizando los ejes cartesianos, y aparecen unas nuevas representaciones de origen didáctico: los diagramas de Venn.	Comienza esta consideración desde los últimos trabajos de Euler sobre funciones "arbitrarias" (siglo XVIII), continúa en el siglo XIX con los de Fourier sobre series trigonométricas y se consolida con los trabajos sobre los números reales de Cauchy, Dedekind, Lovachevsky, Riemann o Dirichlet, entre otros.
Función como terna $f = (A, B, G)$	Todas las de variación que deban ser modelizadas funcionalmente, dentro de cualquier dominio científico.	$f = (A, B, G)$ es una función A: $y \in B$ tal que $(x, y) \in G$ $R =$ es una función $x, y, z, (x, y) \in R$ y $(x, z) \in R$ $y = z$	Las expresadas anteriormente en cuanto a la notación $y$ , en cuanto a las gráficas, se siguen utilizando los ejes cartesianos.	A partir de la estructuración sistemática y lógica de la teoría de conjuntos, principalmente, cuando ésta se tomó como base y fundamento de toda la matemática. (Finales del siglo XIX y primeras décadas del siglo XX).

Tabla 1. Concepciones epistemológicas de la noción de función

## La Propuesta Didáctica

La propuesta didáctica contiene seis secuencias (Tabla 2), con las cuales los educandos van incrementando las capacidades de explorar, razonar, conjeturar y probar, con el fin de desarrollar en forma gradual el pensamiento variacional. Contiene una diversidad de actividades para que el docente elija según los propósitos de la clase y el nivel de conocimiento de los estudiantes.

### Se diseñan dos materiales de apoyo:

Uno denominado: "Actividades de aprendizaje para el alumno" (Figura 3), está compuesto por el nombre de la secuencia, el estándar básico, los indicadores de logro, la estrategia metodológica y una introducción referente a la temática.

Además se encuentran las actividades ordenadas según la estrategia metodológica empleada (Figura 4). En las actividades para el alumnado se presentan las situaciones para que el estudiante construya los co-

nocimientos y comprenda significativamente. Al final de cada construcción se formaliza el concepto.

### A manera de ilustración se expone el siguiente ejemplo:

En primer lugar, antes de comenzar con la temática a construir, el estudiante desarrollará la prueba diagnóstica, planteada por el docente para determinar los conocimientos previos (Figura 5):

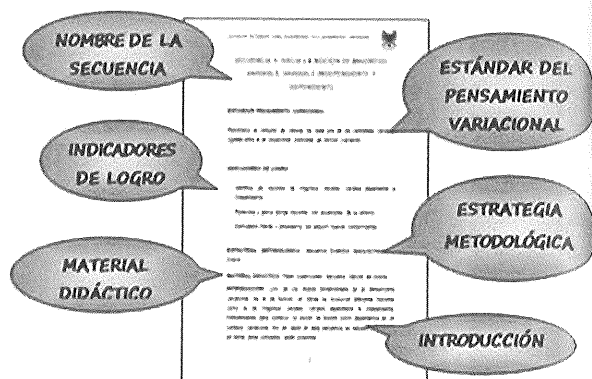


Figura 3. Estructura de las secuencias parte 1

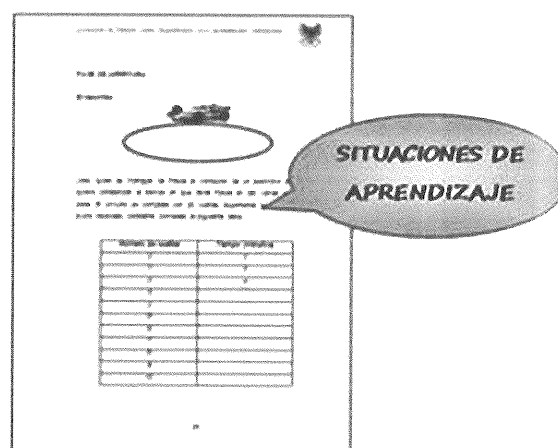


Figura 4. Estructura de las secuencias parte 2

PRUEBA DIAGNOSTICA CON INTENCIONALIDAD DEFINIDA		CUESTIONARIO
TEMA: LA NOCIÓN DE DEPENDENCIA ENTRE VARIABLES.		1. Una de las atracciones de una feria es el globo, una persona paga \$3.000 para subir una vez al globo y hacer un corto vuelo. Si tú pagas \$18.000, ¿Cuántas veces puede subir al globo?
NOMBRE: _____		2. Y, si pagas \$30.000 ¿Cuántas veces viajas en el globo?
GRADO: _____		3. Realiza una tabla que muestre el número de veces que tú subes en el globo y el dinero que debes pagar. Inicia con el número de veces cuando pagas \$3.000, y continúa hasta cuando pagas \$30.000.
FECHA: _____		4. Realiza una gráfica que muestre lo que hiciste en la tabla y justifica tus resultados.
PROPOSITO DE LA PRUEBA.		5. De acuerdo con la información que te brinda la tabla y/o gráfica, responde. ¿Si desea montar 40 veces, cuántos tiene que pagar?
Indagar sobre el conocimiento previo de los educandos en el manejo de la tabulación y graficación como instrumentos de comprensión e interpretación de la dependencia, e identificar posibles errores que predominan en los estudiantes, acerca del uso de estas representaciones.		
INSTRUCCIONES GENERALES		
<ul style="list-style-type: none"> <li>La prueba consta de cinco interrogantes, de cada interrogante debes entregar los respectivos procedimientos y explicaciones necesarias sobre la manera como llegaste a la solución, (de forma clara y ordenada).</li> <li>El tiempo disponible para dar solución a la prueba es de 60 minutos.</li> <li>Lee cuidadosamente la situación antes de responder.</li> </ul>		
EL GLOBO		

Figura 5. Prueba Diagnóstica



Posteriormente, se plantea la secuencia 1: Hacia las nociones de magnitud, variable dependiente e independiente. El estudiante conocerá el estándar del pensamiento variacional, los indicadores de lo-

gro, la estrategia metodológica y el material didáctico que se tendrá en cuenta para cada secuencia, asimismo, la introducción ofrece información acerca de la temática que se trata.

**SECUENCIA 1: HACIA LA NOCIÓN DE MAGNITUD, VARIABLE, VARIABLE INDEPENDIENTE Y DEPENDIENTE**

**ESTANDAR PENSAMIENTO VARIACIONAL**

Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).

**INDICADORES DE LOGRO:**

- Identifica las nociones de magnitud, variable, variable dependiente e independiente.
- Relaciona y aplica dichas nociones con situaciones de su entorno.
- Demuestra interés y entusiasmo por adquirir nuevos conocimientos

**ESTRATEGIA METODOLOGICA:** Secuencia Didáctica Apertura-Desarrollo-Cierre

**MATERIAL DIDÁCTICO:** Papel cuadriculado, escuadra, lápices de colores.

**INTRODUCCIÓN:** Uno de los pilares fundamentales en el pensamiento variacional, es el de función, en donde se involucran diferentes nociones como la de magnitud, variable, variable dependiente e independiente, indispensables para construir la noción de función como dependencia en un contexto variacional. Por tal razón en esta secuencia se estudian situaciones en donde estos conceptos están presentes.

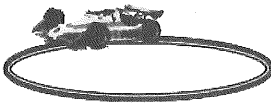
Figura 6. Estructura de la secuencia 1

En esta secuencia la estrategia metodológica empleada es la Secuencia didáctica Apertura-Desarrollo-Cierre, con las siguientes fases.

**Apertura:** los estudiantes analizarán la situación planteada, encontrando una constante para completar la información solicitada.

**FASE DE APERTURA**

**Situación 1: El recorrido**



José, quien es manager de Felipe, el conductor de un automóvil de carreras, quiere contabilizar el tiempo en que tarda Felipe en dar varias vueltas a la pista. El circuito se completa con 20 vueltas. Suponiendo que Felipe conduce a una velocidad constante, completa la siguiente tabla:

Número de vueltas	Tiempo (minutos)
0	0
1	2
2	4
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Figura 7. Fase de apertura secuencia 1

- **Desarrollo:** los alumnos responden una serie de preguntas para construir las nociones implícitas individualmente y posteriormente socializarlas con el grupo en general.

FASE DE DESARROLLO	
Contesta las siguientes preguntas:	
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Puedes decir ¿qué magnitudes intervienen en la situación? Y ¿Por qué se denominan magnitudes?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- ¿El número de vueltas es independiente del tiempo que se gasta para hacer el recorrido? SI ____ NO ____</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- ¿Qué valores recorre la magnitud tiempo?, ¿Puede tomar valores intermedios?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- ¿Encuentra alguna relación, entre el número de vueltas y el tiempo empleado?</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- ¿Qué valores recorre la magnitud vueltas?, ¿Puede tomar valores intermedios?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Según la tabla, ¿es posible encontrar dos o más tiempos diferentes para un mismo número de vueltas? Explica tu respuesta.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- ¿Estas magnitudes están variando? ¿Cómo varía cada una de ellas?</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>- ¿El tiempo depende del número de vueltas que realice Javier con su automóvil? SI ____ NO ____</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>- ¿Por qué?</li> </ul>	

Figura 8. Fase de desarrollo secuencia 1

- **Cierre:** Se formalizan las nociones de magnitud, variable dependiente e independiente.

FASE DE CIERRE
<p><b>Precisando y formalizando las nociones</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Magnitud:</b> Propiedad de un objeto o de un fenómeno físico o químico, susceptible de tomar diferentes valores numéricos, y por tanto, se puede medir.</li> </ul> <p>Para el caso del tiempo en dar las vueltas, la variable número de vueltas varía desde cero, hasta veinte, es decir su estado inicial es cero y su estado final es veinte. Y la variable tiempo varía, desde cero hasta cuarenta, <b>dependiendo</b> del número de vueltas que se den.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Variable:</b> Es una cantidad o magnitud (discreta o continua) que varía en el tiempo, tomando sucesivamente diversos valores.</li> </ul> <p>La variable tiempo, es decir la cantidad de minutos que te gastas en dar las vueltas, <b>depende</b> de la cantidad de vueltas que se hagan, por tal razón a la variable tiempo se le llama <b>VARIABLE DEPENDIENTE</b>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Variable dependiente:</b> Es aquella magnitud que en una relación, su estado inicial hasta su estado final, depende de los valores que puede tomar la otra magnitud con que se relaciona, llamada variable independiente.</li> </ul> <p>La cantidad de vueltas que se realizan <b>no depende</b> del tiempo que se gasta, es decir, la variable número de vueltas que puedo hacer es totalmente <b>independiente</b> del tiempo que se gaste, por tal razón se llama <b>VARIABLE INDEPENDIENTE</b>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>Variable independiente:</b> Aquella magnitud que en relación funcional, desde su estado inicial, hasta su estado final, es totalmente autónoma.</li> </ul>

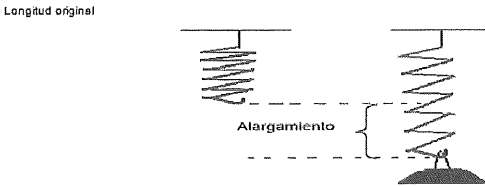
Figura 9. Fase de cierre secuencia 1

**Aplicación:** El estudiante realiza una actividad para verificar los conocimientos construidos.

**Actividad de aplicación**

**Situación 2: El resorte**

Si de un resorte se cuelga un objeto de determinado peso, el resorte se estira, es decir se obtiene un alargamiento, presentándose una variación de la longitud del resorte, con respecto a su longitud original, tal como se muestra en la siguiente figura.



Todos los objetos tienen el mismo peso, cuando se cuelga un objeto al resorte, este sufre un alargamiento de 5 milímetros, cuando se cuelgan dos objetos el resorte sufre un alargamiento de 10 milímetros, cuando se cuelgan tres objetos, sufre un alargamiento de 15 milímetros.

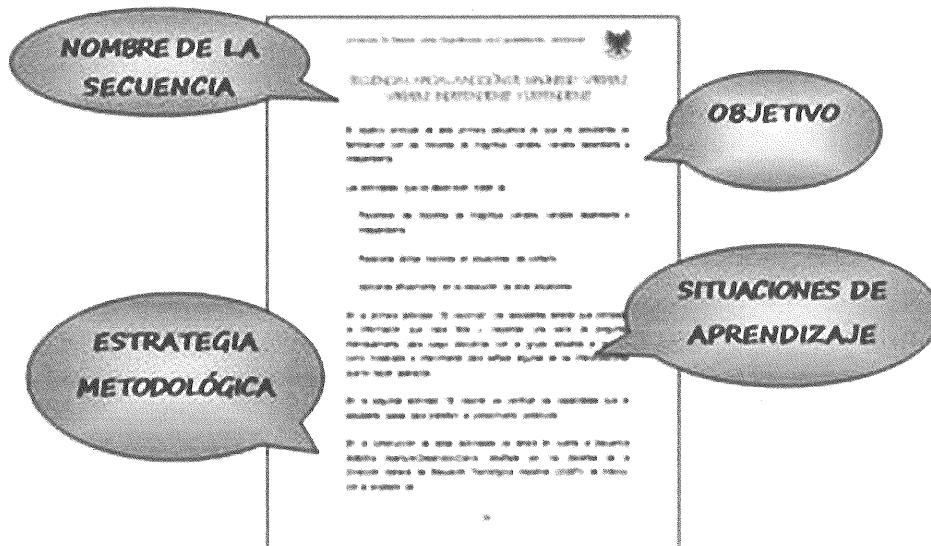
Lea cuidadosamente la situación y responde.

- ¿Qué permanece constante?
- Indica las variables que intervienen en la situación.
- Indica la variable dependiente y la variable independiente. Explica.

Figura 10. Actividad de aplicación

El otro material, titulado "Orientaciones para el profesorado" (Figura 11), presentes en cada secuencia, contiene el nombre

de la secuencia, los objetivos, el sentido de las situaciones de aprendizaje y posibles respuestas de los alumnos.



**NOMBRE DE LA SECUENCIA**

**OBJETIVO**

**SITUACIONES DE APRENDIZAJE**

**ESTRATEGIA METODOLÓGICA**

Figura 11. Estructura de las secuencias parte 3

También se dan algunas sugerencias que permiten un tratamiento algo más avanzado y profundo de la mayoría de las actividades que se presentan y en algunas ocasiones se sugieren otras tareas complementarias que pueden preparar los profesores. Además se presenta la conceptualización de algunas estrategias metodológicas propias de la enseñanza de las matemáticas, tales como: taller Constructivo, Situaciones didácticas de Brousseau y Secuencia didáctica Apertura-Desarrollo-Cierre.

La propuesta se ha diseñado teniendo en cuenta los siguientes componentes: presentación del tema, selección de contenidos, secuenciación de contenidos y organización de las secuencias.

En seguida, se presentan las secuencias diseñadas para la propuesta didáctica, junto con las situaciones de aprendizaje y el objetivo primordial de cada una de estas.

**Tabla 2.** Secuencias y situaciones de aprendizaje

SECUENCIAS	SITUACIONES DE APRENDIZAJE	¿QUÉ SE PRETENDE?
Prueba diagnóstica		Indagar sobre el conocimiento previo de los educandos en el manejo de la tabulación y graficación como instrumentos de comprensión e interpretación de la dependencia.
Secuencia 1: Hacia las nociones de magnitud, variable dependiente e independiente	El recorrido	Construir los conceptos básicos necesarios para el análisis de la dependencia entre variables en situaciones de variación.
	El resorte	
Secuencia 2: Hacia la noción de función como dependencia.	El vehículo	Reconocer el lenguaje tabular como registro que expresa la dependencia entre variables, identificar regularidades y/o patrones numéricos, y hacer traducción entre los lenguajes para la construcción de la noción de función.
	La suma de los ángulos de un polígono	
Secuencia 3: La noción de Función lineal y afín	Ampliando fotografías	Caracterizar y estudiar modelos elementales de funciones como: Lineal, Afín, Hiperbólica y Cuadrática, respectivamente en situaciones contextualizadas.
	Los precios de un almacén	
	Estos problemas ¿son casos de proporcionalidad directa?	
	Las algas productoras de esporas	
	El precio de las impresiones	
Secuencia 4: Función de proporcionalidad inversa	Viaje de Tunja a Duitama	
	La fábrica textil	
	Construyendo rectángulos de igual área	
Secuencia 5: Función cuadrática	La variación del área de rectángulos del mismo perímetro	
	El área del cuadrado	
	La forma de las parábolas	
Secuencia 6: Consolidación e integración	La valla del jardín	El estudiante cimiente su esquema de pensamiento y se apropie de los conocimientos construidos.
	La compra de una pelota	
	Un globo sonda	
	El precio de una ventana	
Prueba final		Indagar sobre la comprensión de los estudiantes sobre la noción de función como dependencia y los modelos elementales

Para observar actividades presentadas en el ejemplo de acción de

En la propuesta el profesor presenta los contenidos teniendo en cuenta el tema, no prueba, ni nario y ob

En la sec es que l con las n nituid, va independ

Las situac sarrollan t de magnit te e indepe nes en siti eficazmer

El punto c señar una noción de variables gunos mo en contex menta en currículo c ciona valid la planific profesional ción teórica didáctica de secund

Para observar el paralelo entre las "Actividades para los alumnos" y las "Orientaciones para el profesorado", se presenta el ejemplo anterior, pero basados en la acción del docente.

En la prueba diagnóstica (Figura 5), el profesor podrá indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes, teniendo en cuenta las siguientes pautas: tema, nombre, grado, propósito de la prueba, instrucciones generales, cuestionario y objetivos de la prueba.

En la secuencia 1, el objetivo principal, es que los estudiantes se familiaricen con las nociones en construcción (magnitud, variable, variable dependiente e independiente).

Las situaciones de aprendizaje que se desarrollan tratan de: reconocer las nociones de magnitud, variable, variable dependiente e independiente; relacionar dichas nociones en situaciones del contexto y aplicarlas eficazmente en la resolución de otras.

## Conclusiones

El punto de partida de este trabajo fue diseñar una propuesta de enseñanza de la noción de función como dependencia entre variables y el reconocimiento y uso de algunos modelos de funciones elementales en contextos con significado. Se fundamenta en la teoría de los organizadores de currículo en matemáticas, la cual proporciona valiosos elementos de análisis para la planificación y realización del trabajo profesional; es decir, aportan a la formación teórica necesaria para el conocimiento didáctico del contenido de las matemáticas de secundaria. (Rico, 1997).

En la construcción de las actividades se tuvo en cuenta la Secuencia didáctica Apertura-Desarrollo-Cierre, diseñada por los docentes de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial (DGETI) de México, con el propósito de:

Apoyar al profesor sugiriendo alternativas de planeación y organización de contenidos presentados a través de secuencias didácticas, buscando facilitar y enriquecer su práctica educativa.

En la primera situación: "El recorrido", los estudiantes tendrán que completar la información que hace falta y responder una serie de preguntas individualmente, para luego discutir las con el grupo, actuando el profesor como moderador e interviniendo para señalar algunas de las interpretaciones que no hayan aparecido.

En la segunda situación: "El resorte" se verifican las capacidades que el estudiante posee para transferir el conocimiento construido.

La elaboración e identificación de los organizadores de currículo sobre la noción de función como dependencia ofrecieron criterios para la selección, secuenciación y organización de los contenidos, ayudando a establecer prioridades en el proceso de construcción del conocimiento.

De esta forma, se estudió el análisis epistemológico, que permitió conocer la complejidad del concepto de función, como ha evolucionado siendo objeto de numerosas precisiones y generalizaciones, así como también ha sido influenciado por concepciones que histórica-

mente se han configurado como resistentes a su evolución, tales como la proporcionalidad, la inconmensurabilidad, y la gran disociación en el pensamiento entre número y magnitud. A pesar de que las funciones fueron usadas por varias culturas en distintos contextos y con diversas finalidades, desde la matemática prehe-lénica, en el siglo XVII, con Leibnitz que se usa por primera vez el término función, la noción es usada por los matemáticos del siglo XVIII y sólo hasta el siglo XIX se formaliza e institucionaliza. El conocimiento de la lentitud y los obstáculos epistemológicos en la evolución de los conceptos matemáticos, nos proporciona algunas razones por las cuales muchos estudiantes manifiestan incomprensión y aversión al aprendizaje de algunos conceptos.

Se consideraron los errores y dificultades de los estudiantes en relación con el aprendizaje de la noción de función, puesto que, proporcionan esquemas para la organización de los contenidos, determinando una secuenciación que facilita la superación de dificultades específicas. Aportan criterios para establecer objetivos, señalando los errores prioritarios que deben evitarse y los obstáculos que hay que superar; suministra orientaciones metodológicas, permitiendo diseñar situaciones que planteen conflictos cognitivos a los alumnos en las que sea necesario reestructurar los conocimientos previos y superar las dificultades conceptuales.

Se reconocieron nuevos enfoques en el tratamiento didáctico generados por los cambios culturales, sociales, tecnológicos y económicos del mundo que han incidido de manera significativa en los currículos escolares. El tratamiento didáctico de la noción de función como dependencia entre variables hace parte de las estrategias para el desarrollo gradual del pensamiento variacional, construyendo vías significativas de acceso para la comprensión y uso de

conceptos y procedimientos del Cálculo cuyo objeto de estudio es la variación y el cambio.

La propuesta contempla la elaboración de una Guía para el docente y otra para los estudiantes. Estas ofrecen variadas estrategias de enseñanza y situaciones de aprendizaje proporcionando una visión diferente de la actividad matemática. De igual forma, se convierte en un instrumento motivador para explorar nuevas formas de enseñar y aprender, y generar reflexión sobre la práctica docente, contribuyendo al desarrollo del conocimiento profesional de docentes en formación y en ejercicio.

Para la comprensión del concepto de función se utilizaron los diferentes sistemas de representación adquiriendo la capacidad de leer e interpretar cada uno de ellos y posteriormente para traducir de uno a otro. Por ejemplo, el uso de la representación gráfica permite ver las características globales de la función (variaciones y períodos constantes, crecimiento, continuidad, concavidad, máximos y mínimos, etc.); la descripción verbal, que utiliza el lenguaje común para dar una visión descriptiva y generalmente cualitativa de la relación funcional; también, se emplea la representación tabular y algebraica, complementando los otros lenguajes.

La propuesta está sustentada en investigaciones de la comunidad científica de Educación Matemática y con fundamentos metodológicos y didácticos para el profesorado, tiene como propósito convertirse en una alternativa de enseñanza de las funciones y los modelos elementales con el fin de que el estudiante logre comprenderlas y valorar su uso, tanto en la vida cotidiana como en las Matemáticas y otras ciencias. Por lo tanto, está disponible para ser implementada, valorada y enriquecida por docentes del área de matemáticas de grados sexto a noveno.



## Bibliografía

- AZCÁRATE, Carmen; DEULOFEU, Jordi. (1996). Funciones y gráficas. Cultura y Aprendizaje. España: Síntesis.
- BORREGO, José. (2001). Proyecto Descartes 2D. Ministerio de Educación.
- BRIONES, Guillermo. (1992). La Investigación Social y Educativa. Colombia: SECAB.
- DEULOFEU, Jordi. (2001). Las funciones en Educación Secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? Aportaciones de la investigación. En: AZCÁRATE, Carmen y DEULOFEU, Jordi. (2001). Guías Praxis para el profesorado. España: Praxis S.A.
- FANDIÑO, M. (2008). "Ser competente", un desafío con raíces antropológicas. En: D'AMORE, B; GODINO, Juan; FANDIÑO, M. (2008). Competencias y Matemática. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- GARCÍA, Gloria; SERRANO, Celly; ESPITIA, Luis. (1997). El concepto de función en textos escolares. Bogotá: Colciencias. Universidad Pedagógica Nacional.
- GARZÓN, A y GARCÍA, M. (2009). Diseño de una secuencia de actividades para la enseñanza de la probabilidad simple en estudiantes de sexto grado. Aplicación y validación. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- GARCÍA, G.; CASTIBLANCO, M. y VERGEL, R. (2005). Prácticas de evaluación en las clases de matemáticas en la Educación Básica. Bogotá: Colciencias. Universidad Pedagógica Nacional.
- GODINO, Juan. (1998). Relaciones entre la investigación en Didáctica de las Matemáticas y la práctica de la enseñanza. En: PUIG, Luis. Investigar y enseñar. Bogotá: Una empresa docente.

HERRERA, Jenny. (2009). La noción de función como dependencia entre variables en el pensamiento variacional. Tunja. UPTC.

MEDINA, Ana. (2009). Guía de Estrategias Didácticas para la comprensión significativa de las matemáticas. Duitama. UPTC.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1994). Ley General de Educación. Bogotá: Unión Ltda.

\_\_\_\_\_. (1998). Lineamientos curriculares del área de matemáticas. Bogotá: Magisterio.

\_\_\_\_\_. (2004). Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Bogotá.

\_\_\_\_\_. (2006). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas: lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

RICO, Luis. (1997). Los organizadores de Currículo. En: RICO Luis, y otros. (1997). La educación matemática en la enseñanza secundaria. España: Horsori.

ROMERO, I. y RICO, Luis. (1999). Construcción social del concepto de número real en alumnos de secundaria: aspectos cognitivos y actitudinales. En: Enseñanza de las Ciencias. España.

RUIZ, Luisa. (1993). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico. Tesis doctoral. España.

SIERPINSKA, A. (1994). Understanding in Mathematics. London: The Falmer Press.